

1. 次の を埋めて、文 章を完成せよ。
Fill in the blanks below to complete the sentences.

関数 $y = -x^3 - 3x^2$ ($-3 \leq x \leq 2$) のグラフの
最大値と最小値を考 える。

$y' = \text{} = \text{} x (x + \text{})$

$y' = 0$ とすると, $x = \text{}$ より, 増 減 表を作る。
Derivative sign chart

x	-3	...	-2	...	0	...	2
y'		-	0	+	0	-	
y	0	↘	-4	↗	0	↘	-20

きょくしょうち
極小値
Local minimum value ($x = \text{}$)

きょくだいち
極大値
Local maximum value ($x = \text{}$)

たんてん
端点 ($x = \text{}$), ($x = \text{}$)
End point

$x = \text{}$ のとき, 最大値 をとり,
Maximum value

$x = \text{}$ のとき, 最小値 をとる。
Minimum value

2. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
Find the maximum and minimum values of the following function.

例題 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ($-2 \leq x \leq 4$)

$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$

$y' = 0$ とすると, $x = -1, 2$

$x = 4$ のとき, 最大値 32
maximum value

$x = 2$ のとき, 最小値 -20
minimum value

x	-2	...	-1	...	2	...	4
y'		+	0	-	0	+	
y	-4	↗	7	↘	-20	↗	32

問題 $y = x^3 - 12x$ ($-3 \leq x \leq 4$)

x							
y'							
y							

3. 厚紙で作る箱の容積を最大にするには, 四隅から切り
取る正方形の 1 辺の長さ x を何 cm にすればよいか。
What should be the length x of each side of the square cut from the 4 corners
to maximize the volume of the cardboard box ?

例題 横 18 cm, 縦 18 cm の厚紙で箱を作る。
Make a box out of cardboard with a width of 18 cm and a height of 18 cm.

四隅から切り取る正方形の 1 辺の長さ x は
 $x > 0$, $18 - 2x > 0$ の条件を満たす必要がある。
 $0 < x < 9$ の範囲で容積 y の最大値を考 える。

$y = (18 - 2x)(18 - 2x)x$
 $= 4x^3 - 72x^2 + 324x$

$y' = 12x^2 - 144x + 324$
 $= 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x - 3)(x - 9)$

$x = 3$ のとき $y = (18 - 2 \times 3)(18 - 2 \times 3) \times 3 = 432$

$x = 3$ cm のとき, 容積の最大値は 432 cm^3 になる。

x	0	...	3	...	9
y'		+	0	-	
y		↗	432	↘	

問題 横 30 cm, 縦 30 cm の厚紙で箱を作る。

x	0	15
y'					
y					

1. 次の を埋めて、文章を完成せよ。
Fill in the blanks below to complete the sentences.

関数 $y = x^3 - 3x$ ($-2 \leq x \leq 2$) のグラフの
最大値と最小値を考 える。

$y' =$ $=$ $(x -$ $)(x +$ $)$

$y' = 0$ とすると、 $x =$ より、増 減 表を作る。

x	-2	...	-1	...	1	...	2
y'		+	0	+	0	-	
y	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

極 小 値: ($x =$ $)$, 極 大 値: ($x =$ $)$

端 点: ($x =$ $)$, ($x =$ $)$

$x =$ のとき、最大値 をとり、

$x =$ のとき、最小値 をとる。

2. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。
Find the maximum and minimum values of the following function.

例題 $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ ($-3 \leq x \leq 1$)

$y' = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x + 1)(x + 3)$

$y' = 0$ とすると、 $x = -1, -3$

$x = 1$ のとき、最大値 16

$x = -1$ のとき、最小値 -4

x	-3	...	-1	...	1
y'	0	-	0	+	
y	0	↘	-4	↗	16

問題 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($0 \leq x \leq 4$)

x					
y'					
y					

3. 厚紙で作る箱の容積を最大にするには、四隅から切り取る正方形の1辺の長さ x を何 cm にすればよいか。
What should be the length x of each side of the square cut from the 4 corners to maximize the volume of the cardboard box ?

例題 横 32 cm , 縦 20 cm の厚紙で箱を作る。

四隅から切り取る正方形の1辺の長さ x は
 $x > 0$, $20 - 2x > 0$ の条件を満たす必要がある。
 $0 < x < 10$ の範囲で容積 y の最大値を考 える。

$y = (20 - 2x)(32 - 2x)x$
 $= 4x^3 - 104x^2 + 640x$
 $y' = 12x^2 - 208x + 640$
 $= 4(x - 4)(3x - 40)$

$x = 4$ のとき $y = (20 - 2 \times 4)(32 - 2 \times 4) \times 4 = 1152$

$x = 4$ cm のとき、容積の最大値は1152 cm³になる。

x	0	...	4	...	10
y'		+	0	-	
y		↗	1152	↘	

問題 横 24 cm , 縦 15 cm の厚紙で箱を作る。

x	0	
y'					
y					

1. 次の直 円 柱の体積 V の最大値を求めよ。
Find the maximum value of the volume V of the following right circular cylinder.

例題 底面の直 径と高さの和が 12 cm である直 円 柱の体積を $V\text{ cm}^3$ の最大値を求めよ。

底面の半径を $x\text{ cm}$ とすると、

高さは $12 - 2x\text{ cm}$, $0 < x < 6$ になる。

$V = \pi x^2 \times (12 - 2x) = \pi (-2x^3 + 12x^2) (\text{cm}^3)$

$V' = \pi (-6x^2 + 24x) = -6\pi x(x - 4)$

体積の最大値は $64\pi\text{ cm}^3$, 半径 4 cm , 高さ 4 cm

x	0	\cdots	4	\cdots	6
V'		$+$	0	$-$	
V	0	\nearrow	64π	\searrow	0

問題 ① 底面の直 径と高さの和が 24 cm である直 円 柱の体積を $V\text{ cm}^3$ の最大値を求めよ。

x					
V'					
V					

問題 ② 底面の直 径と高さの和が 30 cm である直 円 錐の体積を $V\text{ cm}^3$ の最大値を求めよ。

x					
V'					
V					

2. 真上にボールを打ち上げるとき、最高の高さを求めよ。
Find the maximum height when the ball is launched straight up.

例題 真上に 40 m/秒 の速さでボールを打ち上げると高さは $y = -5x^2 + 40x (\text{m})$ になる。

$y' = -10x + 40 = 0$ になるのは $x = 4$

$x = 4$ のとき, $y = -5 \times 4^2 + 40 \times 4 = 80$

4 秒後に最高の高さ 80 m に達する。

$$\begin{aligned} y &= -5x^2 + 40x &&= -5(x^2 - 8x) \\ &= -5\{(x - 4)^2 - 4^2\} &&= -5(x - 4)^2 + 80 \end{aligned}$$

x	0	\cdots	4	\cdots
y'		$+$	0	$-$
y	0	\nearrow	80	\searrow

問題 ① 真上に 30 m/秒 の速さでボールを打ち上げると高さは $y = -5x^2 + 30x (\text{m})$ になる。

x				
y'				
y				

問題 ② 高さ 10 m の屋上 から真上に 20 m/秒 の速さでボールを打ち上げると高さは $y = -5x^2 + 20x + 10 (\text{m})$ になる。

x				
y'				
y				

1. 次の直 円 柱の体積 V の最大値を求めよ。
Find the maximum value of the volume V of the following right circular cylinder.

例題 底面の直 径が 6 cm 、高さが 12 cm の直 円 錐に
内接する直 円 柱の体積 V の最大値を求めよ。

円 柱 の半径を x とすると

$0 < x < 6$ になる。

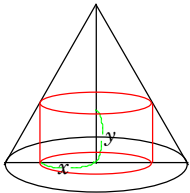
円 柱 の高さ y は

$y = 12 - 4x$

$V = \pi x^2 (12 - 4x) = -4\pi (x^3 - 3x^2)$

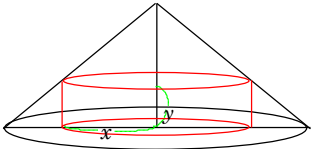
$V' = -4\pi (3x^2 - 6x) = -12\pi x(x - 2)$

体積の最大値は $16\pi\text{ cm}^3$ 、半径 2 cm 、高さ 4 cm



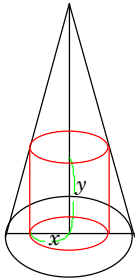
x	0	...	2	...	3
V'		+	0	−	
V	0	↗	16π	↘	0

問題 ① 底面の直 径が 12 cm 、高さが 6 cm の直 円 錐に
内接する直 円 柱の体積 V の最大値を求めよ。



x	
V'	
V	

問題 ② 底面の直 径が 6 cm 、高さが 18 cm の直 円 錐に
内接する直 円 柱の体積 V の最大値を求めよ。



x	
V'	
V	

2. 畑をロープで長 方 形に囲い、花 畑を作るとき、花 畑
の面積の最大値を求めよ。
When you create a flower garden by enclosing a rectangular field with a rope,
find the maximum area of the flower garden.

例題 100 m のロープで畑を長 方 形に囲い、花 畑を
作るとき、花 畑の面積 S の最大値を求めよ。

畑の横を x 、縦を y とする。

$x + y = 50$ より、 $y = 50 - x$ ($0 < x < 50$)

$S = xy = x(50 - x) = -x^2 + 50x$

$S' = -2x + 50$

面積の最大値は 625 m^2 、横 25 m 、縦 25 m

x	0	...	25	...	50
S'		+	0	−	
S	0	↗	625	↘	0

問題 ① 200 m のロープで畑を長 方 形に囲い、花 畑を
作るとき、花 畑の面積 S の最大値を求めよ。

x	
S'	
S	

問題 ② 400 m のロープで畑を長 方 形に囲い、花 畑を
作るとき、花 畑の面積 S の最大値を求めよ。

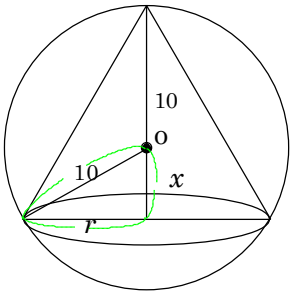
x	
S'	
S	

例題 半径 10 cm の球 に内接する直円錐の体積 V の最大値を求めよ。

直円錐の底面と球の

中心の距離を x とする。

$0 < x < 10$ になる。



底面の半径を r とすると、三平方の定理より

$$10^2 = r^2 + x^2$$

$$r > 0 \text{ より, } r = \sqrt{10^2 - x^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\sqrt{10^2 - x^2} \right)^2 (10 + x)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(-x^3 - 10x^2 + 100x + 1000 \right)$$

$$V' = -\frac{1}{3} \pi \left(3x^2 + 20x - 100 \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \pi \left(3x - 10 \right) \left(x + 10 \right)$$

$x = \frac{10}{3}$ のとき, $V' = 0$, V は最大になる。

$$V = \frac{1}{3} \pi \left\{ -\left(\frac{10}{3} \right)^3 + 20 \left(\frac{10}{3} \right)^2 + 100 \times \frac{10}{3} + 1000 \right\}$$

$$= \frac{32000}{81} \pi$$

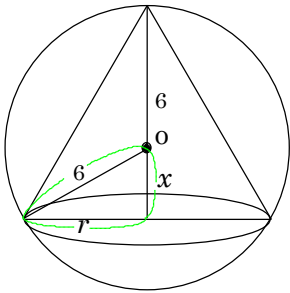
体積の最大値は $\frac{32000}{81} \pi \text{ cm}^3$

x	0	...	$\frac{10}{3}$...	10
V'		+	0	−	
V	0	↗	$\frac{320000}{81} \pi$	↘	0

問題 半径 6 cm の球 に内接する直円錐の体積 V の最大値を求めよ。

直円錐の底面と球の

中心の距離を x とする。



底面の半径を r とすると、三平方の定理より

$$6^2 = r^2 + x^2$$

$$r > 0 \text{ より, } r = \sqrt{6^2 - x^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\sqrt{6^2 - x^2} \right)^2 (6 + x)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(-x^3 - 6x^2 + 12x + 36 \right)$$

$$V' = -\frac{1}{3} \pi \left(3x^2 + 12x - 12 \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \pi \left(3x - 2 \right) \left(x + 6 \right)$$

$x = \frac{2}{3}$ のとき, $V' = 0$, V は最大になる。

$$V = \frac{1}{3} \pi \left\{ -\left(\frac{2}{3} \right)^3 + 6 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 12 \times \frac{2}{3} + 36 \right\}$$

$$= \frac{128}{27} \pi$$

体積の最大値は $\frac{128}{27} \pi \text{ cm}^3$

x	
V'	
V	