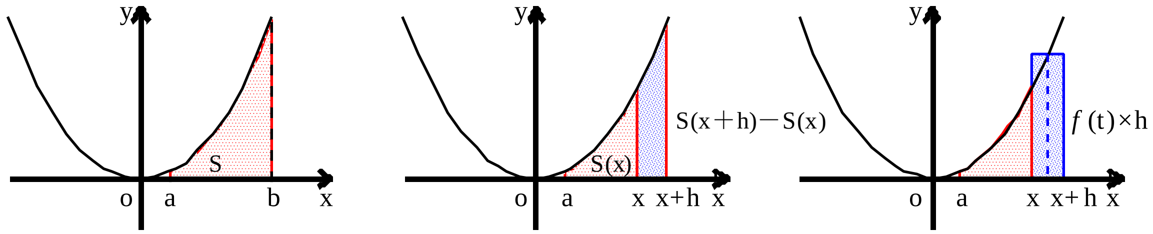
数学Ⅱ　面積　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　)

定積分と面積

$y = f(x)$のグラフが区間$[a, b]$において，$f(x) \geqq 0$，$a \leqq x \leqq b$ のとき，a から x までの範囲で，$y = f(x)$と x 軸の間の面積を $S(x)$とする。



定義により　$S'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}$ になる。

このとき，$S(x+h)-S(x)$は，x と x＋h の間に適当な t を選べば，横が h，縦が $f(t)$ の長方形の面積と等しくできる。

したがって，$S'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)\times h}{h} = \lim_{h\to 0} f(t)$

ここで，$h \to 0$ のときの $f(t)$を考えると，t は x と x+h の間だから，$t \to x$ になる。

ゆえに $S'(x) = f(x)$ になる。$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ とすると $S(x) = F(x) + C$ になる。

ところが，$x = a$ のとき $S(x) = 0$ になるので，$S(a) = F(a) + C = 0$ よって $C = -F(a)$

したがって，$S(x) = F(x) - F(a)$

$x = a$ から b までの面積が S だから　$S = S(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

$f(x) \leqq 0$ のときは，$-f(x) \geqq 0$ を考える。これは，x軸に関して $y = f(x)$と対称であり，面積 $S = \int_a^b \{-f(x)\}dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

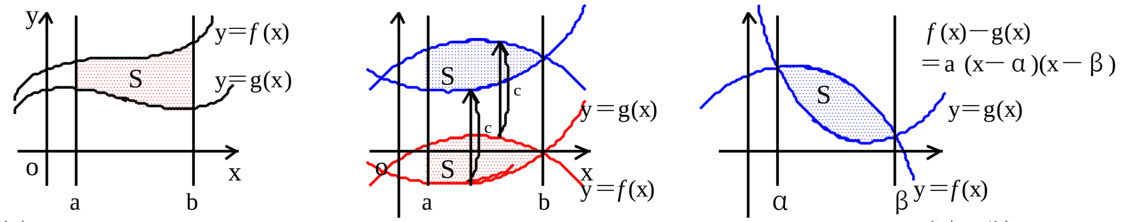
面積

a≦x≦bにおいて, y=f(x)のグラフとx軸, 2 直線 x=a, x=b で囲まれた面積 S は

$f(x) \geqq 0$のとき　$S = \int$　　　　　　$f(x) \leqq 0$のとき　$S = -\int$

問題 A　$y = \frac{1}{3}x^2$ と x軸および 2 直線 x=1，x=2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

2つのグラフの間の面積



区間$[a, b]$において，$f(x) \geqq g(x) \geqq 0$であるとき，$y = f(x)$，$y = g(x)$と x軸に挟まれた部分の面積を，S_1, S_2 とすると, $S = S_1 - S_2$ になる。

よって，$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$

区間$[a, b]$において, $g(x) < 0$ となる x が存在する場合，適当な c をとると，$g(x)+c \geqq 0$ になり，グラフを＋c 平行移動して考える。$(f(x)+c) - (g(x)+c) = f(x) - g(x)$ より，

$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$

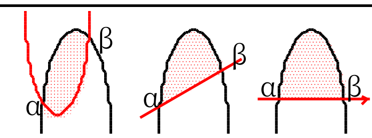
2つのグラフの間の面積

a≦x≦bにおいて, y=f(x)とy=g(x)とx軸, 2 直線 x=a, x=b で囲まれた面積 S は

$S = \int \{\qquad\qquad\} dx$　　　ただし，$f(x) \geqq g(x)$のとき

放物線で囲まれた図形の面積

$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$



問題 B　区間$[0, 2]$において，$y = x^2$ と $y = 2x$ に挟まれる図形の面積を求めよ。

区間$[0, 2]$では，$x^2 \leqq 2x$ であるから

問題 C　次の曲線と直線によって囲まれる図形の面積を求めよ。

$y = x^2 + 2x$, $y = 2x + 4$