数学Ⅱ　面積　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の放物線と x 軸および 2 直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola, the x-axis, and two straight lines.

例題　放物線 $y = x^2 + 1$ と x 軸, $x = 1$, $x = 2$

$$S = \int_1^2 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{10}{3}$$

問題　放物線 $y = 3x^2 + 1$ と x 軸, $x = 1$, $x = 2$

2．次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and the x-axis.

例題　放物線 $y = x^2 - 4x$ と x 軸

$y = x^2 - 4x$ と x 軸($y = 0$)の交点の x 座標は

$x^2 - 4x = x(x-4) = 0$　より　$x = 0$, 4

$0 \leqq x \leqq 4$の範囲では $y \leqq 0$であるから

$$S = \int_0^4 (-x^2+4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 2\times 4^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 2\times 0^2\right)$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 32\right) - \left(-\frac{0}{3} - 0\right) = \frac{32}{3}$$

問題　放物線 $y = x^2 - 3x$ と x 軸

3．次の放物線と 3 直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and three straight lines.

例題　放物線 $y = x^2 + 2$ と $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$

$0 \leqq x \leqq 1$の範囲では　$x^2+2 \geqq 2x$ より

$$S = \int_0^1 \{(x^2+2) - (2x)\}\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + 2\right) - \left(\frac{0}{3} - 0 + 0\right) = \frac{4}{3}$$

問題　放物線 $y = 3x^2$ と $y = 2x + 1$, $x = 0$, $x = 1$

4．次の放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and straight lines.

例題　放物線 $y = x^2$ と $y = x + 2$

$y = x^2$ と $y = x+2$ の交点の x 座標は　$x = -1$, 2

$x^2 = x+2$ より　$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0$

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲では $x+2 \geqq x^2$　であるから

$$S = \int_{-1}^2 \{(x+2) - (x^2)\}\,dx$$

$$= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)\}dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

問題　$y = 3x^2$ と $y = 3x$

数学Ⅱ　面積２課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

1．次の放物線と x 軸および２直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola, the x-axis, and two straight lines.

例題　放物線 $y = x^2 + 2$ と x 軸, $x = 0$, $x = 3$

$$S = \int_0^3 (x^2+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} + 2\times 3\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 2\times 0\right)$$

$$= \left(\frac{27}{3} + 6\right) - \left(\frac{0}{3} + 0\right) = 15$$

問題　放物線 $y = 2x^2 + 1$ と x 軸, $x = 0$, $x = 3$

2．次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and the x-axis.

例題　放物線 $y = x^2 + 2x$ と x 軸

$y = x^2 + 2x$ と x 軸($y = 0$)の交点の x 座標は

$x^2 + 2x = x(x+2) = 0$ 　より　$x = 0$, -2

$-2 \leqq x \leqq 0$ の範囲では $y \leqq 0$ であるから

$$S = \int_{-2}^0 (-x^2 - 2x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^0$$

$$= \left(-\frac{0^3}{3} - 0^2\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right)$$

$$= \left(-\frac{0}{3} - 0\right) - \left(-\frac{-8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

問題　放物線 $y = x^2 + 3x$ と x 軸

3．次の放物線と３直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and three straight lines.

例題　放物線 $y = x^2 + 2$ と $y = 2x$, $x = 0$, $x = 2$

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では $x^2 + 1 \geqq 2x$ より

$$S = \int_0^2 \{(x^2+2) - (2x)\}\,dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 - 2x + 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 4\right) - \left(\frac{0}{3} - 0 + 0\right) = \frac{8}{3}$$

問題　放物線 $y = 3x^2$ と $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$

4．次の放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and straight lines.

例題　放物線 $y = x^2$ と $y = 2x + 3$

$y = x^2$ と $y = 2x + 3$ の交点の x 座標は　$x = -1$, 3

$x^2 = 2x + 3$ より　$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$

$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲では $2x + 3 \geqq x^2$ であるから

$$S = \int_{-1}^3 \{(2x+3) - (x^2)\}\,dx$$

$$= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3)\}\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3$$

$$= \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9\right) - \left(-\frac{-1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3}$$

問題　$y = 2x^2$ と $y = 2x$

数学Ⅱ　面積 3 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の放物線と x 軸および 2 直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola, the x-axis, and two straight lines.

例題　放物線 $y = x^2 + x$ と x 軸, $x = 1$, $x = 2$

$$S = \int_1^2 (x^2 + x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{23}{6}$$

問題　放物線 $y = x^2 + 2x$ と x 軸, $x = 0$, $x = 1$

2．次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and the x-axis.

例題　放物線 $y = -x^2 + 3x$ と x 軸

$y = -x^2 + 3x$ と x 軸($y = 0$)の交点の x 座標は

$-x^2 + 3x = -x(x - 3) = 0$　より　$x = 0$, 3

$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲では $y \geqq 0$ であるから

$$S = \int_0^3 (-x^2 + 3x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3\times3^2}{2}\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{3\times0^2}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

問題　放物線 $y = -x^2 + 4x$ と x 軸

3．次の放物線と 3 直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and three straight lines.

例題　放物線 $y = x^2 - 2$ と $y = x$, $x = 0$, $x = 1$

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では $x \geqq x^2 - 2$ より

$$S = \int_0^1 \{x - (x^2 - 2)\}\,dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x + 2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2} + 0\right) = \frac{13}{6}$$

問題　放物線 $y = x^2$ と $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$

4．次の放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

Find the area S of the area surrounded by the following parabola and straight lines.

例題　放物線 $y = x^2 + x$ と $y = 3x$

$y = x^2 + x$ と $y = 3x$ の交点の x 座標は　$x = 0$, 2

$x^2 + x = 3x$ より　$x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$

$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲では $3x \geqq x^2 + x$ であるから

$$S = \int_0^2 \{3x - (x^2 + x)\}\,dx$$

$$= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 4\right) - \left(-\frac{0}{3} + 0\right) = \frac{4}{3}$$

問題　$y = x^2 - x$ と $y = 2x$

数学Ⅱ　面積(いろいろなグラフ)　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題①　曲線 $y = x^3 + x^2 - 2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積の和 S を求めよ。
Find the sum S of the area surrounded by the curve $y=x^3+x^2-2x$ and the x-axis.

曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と x 軸の交点の x 座標は

$x^3+x^2-2x=x(x+2)(x-1)=0$　より

$x=-2, 0, 1$ である。

$-2 \leqq x \leqq 0$ のとき，$y \geqq 0$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$y \leqq 0$

よって，求める面積の和 S は

$$S = \int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx + \int_{0}^{1}\{-(x^3+x^2-2x)\}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= 0-\left\{\frac{(-2)^4}{4}+\frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2\right\} + \left\{-\frac{1^4}{4}-\frac{1^3}{3}+1^2\right\}-0$$

$$= \frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

問題①　曲線 $y = x^3 - x$ と x 軸で囲まれた部分の面積の和 S を求めよ。

例題②　次の定積分を求めよ。 Find the following definite integral.

$$\int_0^2 |x(x-1)|\,dx$$

$x(x-1)=0$ を解くと，　$x=0, 1$

$x \leqq 0$，$1 \leqq x$ のとき，$|x(x-1)| = x(x-1)$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$|x(x-1)| = -x(x-1)$

$$\int_0^2 |x(x-1)|\,dx$$

$$= \int_0^1\{-x(x-1)\}\,dx + \int_1^2 x(x-1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{3}\right) + \left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$

問題②　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^3 |x(x-2)|\,dx$$

数学Ⅱ　面積(いろいろなグラフ)２ 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

例題 ①　曲線 $y=x^3+x^2-6x$ と x 軸で囲まれた部分の面積の和 S を求めよ。

Find the sum S of the area surrounded by the curve $y=x^3+x^2-6x$ and the x-axis.

曲線 $y=x^3+x^2-6x$ と x 軸の交点の x 座標は

$x^3+x^2-6x=x(x-2)(x+3)=0$　より

$x=-3,\ 0,\ 2$ である。

$-3\leqq x\leqq 0$ のとき，$y\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき，$y\leqq 0$

よって，求める面積の和 S は

$$S=\int_{-3}^{0}(x^3+x^2-6x)\,dx+\int_{0}^{2}\{-(x^3+x^2-6x)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{0}^{3}$$

$$=0-\left\{\frac{(-3)^4}{4}+\frac{(-3)^3}{3}-3(-3)^2\right\}+\left\{-\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-3\times 2^2\right\}-0$$

$$=\frac{63}{4}+\frac{16}{3}=\frac{253}{12}$$

例題 ②　次の定積分を求めよ。Find the following definite integral.

$$\int_0^4 |x(x-2)|\,dx$$

$x(x-2)=0$ を解くと，　$x=0,\ 2$

$x\leqq 0,\ 2\leqq x$ のとき，　$|x(x-2)|=x(x-2)$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき，　$|x(x-2)|=-x(x-2)$

$$\int_0^4 |x(x-2)|\,dx$$

$$=\int_0^2\{-x(x-2)\}\,dx+\int_2^4 x(x-2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^4$$

$$=\left(-\frac{2^3}{3}+2^2\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+0^2\right)+\left(\frac{4^3}{3}-4^2\right)-\left(\frac{2^3}{3}-2^2\right)$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$$

問題 ①　曲線 $y=x^3-4x$ と x 軸で囲まれた部分の面積の和 S を求めよ。

例題 ②　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^3 |x(x-1)|\,dx$$

数学Ⅱ　面積(いろいろなグラフ) 3　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題①　曲線 $y=x^3-x^2-2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積の和 S を求めよ。

Find the sum S of the area surrounded by the curve $y=x^3+x^2-6x$ and the x-axis.

曲線 $y=x^3-x^2-2x$ と x 軸の交点の x 座標は

$x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2)=0$　より

$x=-1, 0, 2$ である。

$-1\leqq x\leqq 0$ のとき，$y\geqq 0$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき，$y\leqq 0$

よって，求める面積の和 S は

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}\{-(x^3-x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=0-\left\{\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2\right\}+\left\{-\frac{2^4}{4}+\frac{2^3}{3}+2^2\right\}-0$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

例題②　次の定積分を求めよ。Find the following definite integral.

$$\int_0^4 |x(x-3)|\,dx$$

$x(x-3)=0$ を解くと，　$x=0, 3$

$x\leqq 0, 3\leqq x$ のとき，$|x(x-3)|=x(x-3)$

$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$|x(x-3)|=-x(x-3)$

$$\int_0^4 |x(x-3)|\,dx$$

$$=\int_0^3\{-x(x-3)\}\,dx+\int_3^4 x(x-3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_3^4$$

$$=\left(-\frac{3^3}{3}+\frac{3\times3^2}{2}\right)-\left(\frac{0^3}{3}+\frac{3\times0^2}{2}\right)+\left(\frac{4^3}{3}-\frac{3\times4^2}{2}\right)-\left(\frac{3^3}{3}-\frac{3\times3^2}{2}\right)$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{19}{3}$$

問題①　曲線 $y=x^3-2x^2-3x$ と x 軸で囲まれた部分の面積の和 S を求めよ。

例題②　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^5 |x(x-4)|\,dx$$