

数学 関数の極限值 ()年()組()番()

関数の極限值

関数 $f(x)$ において x の値を a に限りなく近づけたなら、
 $f(x)$ が一定の値 に限りなく近づくことを
 $x = a$ のとき $f(x)$ または $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ と表す。
 \lim は *limit* の略
この を $x = a$ のときの $f(x)$ の () という。

右側, 左側からの極限值 (数学 レベル)

関数 $f(x)$ において x を a より大きい値 をとり a に限りなく近づけたなら、
 $f(x)$ が限りなく に近づくとき、(側からの極限值)といい、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) =$ と表す。

関数 $f(x)$ において x を a より小さい値 をとり a に限りなく近づけたなら、
 $f(x)$ が限りなく に近づくとき、(側からの極限值)といい、 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) =$ と表す。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ とは $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) =$ かつ、 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) =$ である。
限りなく大きくなる値 を無限大といい、()で表す。

極限値の証明 (大学レベル)

$f(x) = 2x$ ならば、 $x = 2$ のとき $f(x) = 4$ 、すなわち $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ を証明する。

任意の ϵ にたいして、 $\delta = \frac{1}{2}$ と定めれば
 $|x - 2| < \delta$ について $|2x - 4| < \epsilon$ が成立する。
極限値との差を限界点()以下にする方法がある。

- (1) $\epsilon = 4$ のとき $\delta = 2$ になる。
 $|x - 2| < 2$ となる x は 3.99 、 $|2x - 4| = 3.98 < 4$ になる。
- (2) $\epsilon = 2$ のとき $\delta = 1$ になる。
 $|x - 2| < 1$ となる x は 2.99 、 $|2x - 4| = 1.98 < 2$ になる。
- (3) $\epsilon = 1$ のとき $\delta = 0.5$ になる。
 $|x - 2| < 0.5$ となる x は 2.49 、 $|2x - 4| = 0.98 < 1$ になる。

極限値の性質

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$ (, は定数)のとき

$\lim_{x \rightarrow a} k \times f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} =$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) =$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$ ()

問題 A 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} 3x$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} 2x$ (3) $\lim_{x \rightarrow -1} x^2$

(4) $\lim_{x \rightarrow -3} 2x^2$ (5) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3)$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 3)$

(7) $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)(2x - 1)$ (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$ (9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1}$

(10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (11) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$ (12) $\lim_{h \rightarrow 0} (ah^2 + bh + c)$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\quad}{h} + \frac{\quad}{h} \right)$

応用問題 B $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$ が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ。

$x = 1$ のとき分母 ($x - 1 =$)となる。極限値を持つためには分子も()になる。
したがって分子は 式を整理して($b =$)

このとき $x^2 + ax + b =$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\quad)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1}$

極限値が 3 になることより

$a =$ のとき $b =$

発展問題 C 次の極限値が存在すれば、その値を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x}$ (右側からの極限値) (2) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x}$ (左側からの極限値)

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ (4) $\lim_{x \rightarrow -0} \sqrt{x}$ (左側からの極限値)

(5) $\lim_x 2x$ (6) $\lim_x \frac{1}{x}$