

1. 次の計算をなさい。

Calculate the following value.

| 例題 | 問題 |
|--|----------------------|
| $\log_3 9$ $= \log_3 3^2 = 2$ | $\log_2 8$ |
| $\log_3 3$ $= \log_3 3^1 = 1$ | $\log_2 4$ |
| $\log_3 1$ $= \log_3 3^0 = 0$ | $\log_2 2$ |
| $\log_3 \frac{1}{3}$ $= \log_3 3^{-1} = -1$ | $\log_2 1$ |
| $\log_3 \frac{1}{9}$ $= \log_3 3^{-2} = -2$ | $\log_2 \frac{1}{2}$ |

2. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.

例題 $y = \log_3 x$

漸近線は y 軸 ($x=0$)
単調増加

問題 $y = \log_2 x$

3. 次の不等式を解きなさい。

Solve the following inequality.

| 例題 | 問題 |
|--|----------------|
| $\log_3 x > 2$ 真数は正より, $x > 0$ $\log_3 x > \log_3 3^2$ 底3が1より大きい $x > 3^2 = 9$ したがって, $x > 9$ | $\log_2 x > 3$ |

4. 次の計算をなさい。

Calculate the following value.

| 例題 | 問題 |
|---|--------------------------------|
| $\log \frac{1}{3} \frac{1}{3}$ $= \log \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 1$ | $\log \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ |
| $\log \frac{1}{3} 1$ $= \log \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 0$ | $\log \frac{1}{2} 1$ |
| $\log \frac{1}{3} 3$ $= \log \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$ | $\log \frac{1}{2} 2$ |
| $\log \frac{1}{3} 9$ $= \log \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2$ | $\log \frac{1}{2} 4$ |

5. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.

例題 $y = \log \frac{1}{3} x$

漸近線は y 軸 ($x=0$)
単調減少

問題 $y = \log \frac{1}{2} x$

6. 次の不等式を解きなさい。

Solve the following inequality.

| 例題 | 問題 |
|--|--------------------------|
| $\log \frac{1}{3} x > 2$ 真数は正より, $x > 0$ $\log \frac{1}{3} x > \log \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^2$ 底 $\frac{1}{3}$ が 1 より小さい $x < \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ したがって, $0 < x < \frac{1}{9}$ | $\log \frac{1}{2} x > 3$ |

1. 次の計算をなさい。

Calculate the following value.

| 例題 | 問題 |
|--|----------------------|
| $\log_2 8$ $= \log_2 2^3 = 3$ | $\log_3 9$ |
| $\log_2 4$ $= \log_2 2^2 = 2$ | $\log_3 3$ |
| $\log_2 2$ $= \log_2 2^1 = 1$ | $\log_3 1$ |
| $\log_2 1$ $= \log_2 2^0 = 0$ | $\log_3 \frac{1}{3}$ |
| $\log_2 \frac{1}{2}$ $= \log_2 2^{-1} = -1$ | $\log_3 \frac{1}{9}$ |

2. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.

例題 $y = \log_2 x$

漸近線は y 軸 ($x=0$)

単調増加

問題 $y = \log_3 x$

3. 次の不等式を解きなさい。

Solve the following inequality.

| 例題 | 問題 |
|--|----------------|
| $\log_2 x < 3$ 真数は正より, $x > 0$ $\log_2 x < \log_2 2^3$ 底 2 が 1 より大きい $x < 2^3 = 8$ したがって, $0 < x < 8$ | $\log_3 x < 2$ |

4. 次の計算をなさい。

Calculate the following value.

| 例題 | 問題 |
|---|--------------------------------|
| $\log \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ $= \log \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$ | $\log \frac{1}{3} \frac{1}{3}$ |
| $\log \frac{1}{2} 1$ $= \log \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$ | $\log \frac{1}{3} 1$ |
| $\log \frac{1}{2} 2$ $= \log \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$ | $\log \frac{1}{3} 3$ |
| $\log \frac{1}{2} 4$ $= \log \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$ | $\log \frac{1}{3} 9$ |

5. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.

例題 $y = \log \frac{1}{2} x$

漸近線は y 軸 ($x=0$)

単調減少

問題 $y = \log \frac{1}{3} x$

6. 次の不等式を解きなさい。

Solve the following inequality.

| 例題 | 問題 |
|--|--------------------------|
| $\log \frac{1}{2} x < 3$ 真数は正より, $x > 0$ $\log \frac{1}{2} x < \log \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3$ 底 $\frac{1}{2}$ が 1 より小さい $x > \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ したがって, $x > \frac{1}{8}$ | $\log \frac{1}{3} x < 2$ |

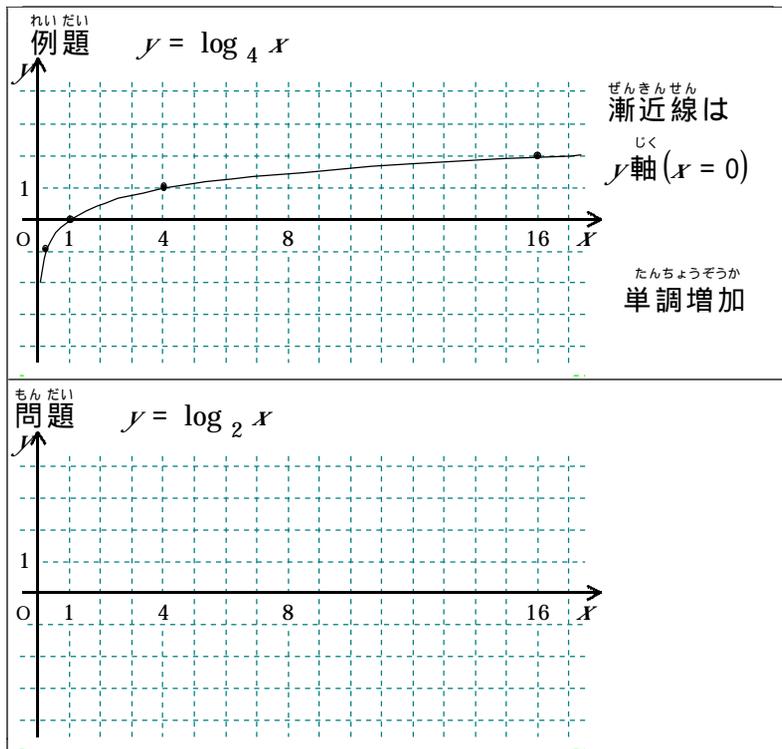
1. 次の計算をなさい。

Calculate the following value.

| 例題 | 問題 |
|--|----------------------|
| $\log_4 64$ $= \log_4 4^3 = 3$ | $\log_2 16$ |
| $\log_4 16$ $= \log_4 4^2 = 2$ | $\log_2 8$ |
| $\log_4 4$ $= \log_4 4^1 = 1$ | $\log_2 4$ |
| $\log_4 1$ $= \log_4 4^0 = 0$ | $\log_2 2$ |
| $\log_4 \frac{1}{4}$ $= \log_4 4^{-1} = -1$ | $\log_2 1$ |
| $\log_4 \frac{1}{16}$ $= \log_4 16^{-2} = -2$ | $\log_2 \frac{1}{2}$ |

2. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.



3. 次の不等式を解きなさい。

Solve the following inequality.

| 例題 | 問題 |
|---------------------------------------|----------------|
| $\log_4 x < 2$ 真数は正より, $x > 0$ | $\log_2 x < 4$ |
| $\log_4 x < \log_4 4^2$ 底4 が1より大きい | |
| $x < 4^2 = 16$ | |
| したがって, $0 < x < 16$ | |

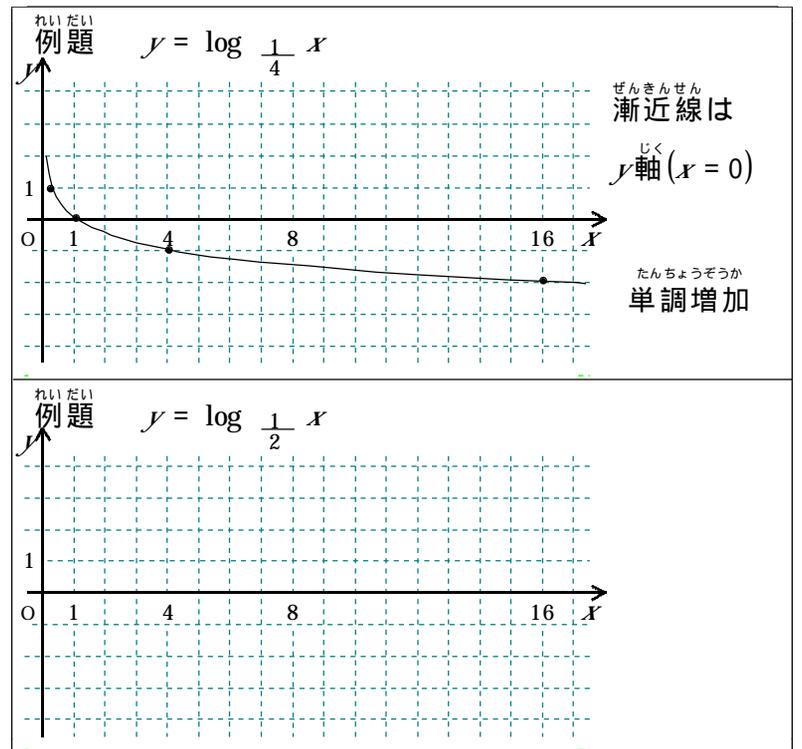
4. 次の計算をなさい。

Calculate the following value.

| 例題 | 問題 |
|---|----------------------------------|
| $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$ $= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 1$ | $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ |
| $\log_{\frac{1}{4}} 1$ $= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 0$ | $\log_{\frac{1}{2}} 1$ |
| $\log_{\frac{1}{4}} 4$ $= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = -1$ | $\log_{\frac{1}{2}} 2$ |
| $\log_{\frac{1}{4}} 16$ $= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = -2$ | $\log_{\frac{1}{2}} 4$ |
| $\log_{\frac{1}{4}} 64$ $= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = -3$ | $\log_{\frac{1}{2}} 8$ |

5. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.



6. 次の不等式を解きなさい。

Solve the following inequality.

| 例題 | 問題 |
|---|----------------------------|
| $\log_{\frac{1}{4}} x < 2$ 真数は正より, $x > 0$ | $\log_{\frac{1}{2}} x < 3$ |
| $\log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2$ 底 $\frac{1}{4}$ が1より小さい | |
| $x > \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ | |
| したがって, $x > \frac{1}{16}$ | |

1. 次の対数不等式を解きなさい。 底が1より大
 Solve the following logarithmic inequality.

2. 次の対数不等式を解きなさい。 底が1より小
 Solve the following logarithmic inequality.

例題 $\log_2 x(x+1) < 1$

真数が正より $x(x+1) > 0$, $x < -1$ または $0 < x$
式を変形し $\log_2 x(x+1) < \log_2 2$
底が1より大きいから
 $x(x+1) < 2$, $x^2 + x - 2 < 0$
 $(x-1)(x+2) < 0$ より $-2 < x < 1$
 したがって, $-2 < x < -1$, $0 < x < 1$

例題 $\log \frac{1}{2} x(x-1) < -1$

真数が正より $x(x-1) > 0$, $x < 0$ または $1 < x$
式を変形し $\log \frac{1}{2} x(x-1) < \log \frac{1}{2} 2$
底が1より小さいから 不等号の向きが変わる
 $x(x-1) > 2$, $x^2 - x - 2 > 0$
 $(x+1)(x-2) > 0$ より $x < -1$, $2 < x$
 したがって, $x < -1$, $2 < x$

問題 $\log_3 x(x+2) < 1$

問題 $\log \frac{1}{3} x(x-2) < -1$

例題 $\log_3 (x-3) + \log_3 (x-5) < 1$

真数が正より $x-3 > 0$ かつ $x-5 > 0$
 よって, $x > 5$
式を変形し $\log_3 (x-3)(x-5) < \log_3 3$
底が1より大きいから
 $(x-3)(x-5) < 3$
 $x^2 - 8x + 12 < 0$
 $(x-2)(x-6) < 0$ より $2 < x < 6$
 したがって, $5 < x < 6$

例題 $\log \frac{1}{2} (x+2) + \log \frac{1}{2} (x+5) < -2$

真数が正より $x+2 > 0$ かつ $x+5 > 0$
 よって, $x > -2$
式を変形し $\log \frac{1}{2} (x+2)(x+5) < \log \frac{1}{2} 4$
底が1より小さいから 不等号の向きが変わる
 $(x+2)(x+5) > 4$
 $x^2 + 7x + 6 > 0$
 $(x+1)(x+6) > 0$ より $x < -6$, $-1 < x$
 したがって, $x > -1$

問題 $\log_2 (x-2) + \log_2 (x-3) < 1$

問題 $\log \frac{1}{3} x + \log \frac{1}{3} (x-2) < -1$

1. 次の対数不等式を解きなさい。 底が1より大
 Solve the following logarithmic inequality.

2. 次の対数不等式を解きなさい。 底が1より小
 Solve the following logarithmic inequality.

例題 $\log_3 x(x-8) > 2$

真数が正より $x(x-8) > 0$, $x < 0$ または $8 < x$
 式を変形し $\log_3 x(x-8) > \log_3 9$

底が1より大きいから

$$x(x-8) > 9 \quad , \quad x^2 - 8x - 9 > 0$$

$$(x+1)(x-9) > 0 \quad \text{より} \quad x < -1, \quad 9 < x$$

したがって, $x < -1$, $9 < x$

問題 $\log_2 x(x-3) > 2$

例題 $\log \frac{1}{2} x(x-3) > -2$

真数が正より $x(x-3) > 0$, $x < 0$ または $3 < x$
 式を変形し $\log \frac{1}{2} x(x-3) > \log \frac{1}{2} 4$

底が1より小さいから 不等号の向きが変わる

$$x(x-3) < 4 \quad , \quad x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x+1)(x-4) < 0 \quad \text{より} \quad -1 < x < 4$$

したがって, $-1 < x < 0$, $3 < x < 4$

問題 $\log \frac{1}{3} (x-1)(x+3) > -1$

例題 $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-4) > 2$

真数が正より $x-1 > 0$ かつ $x-4 > 0$

よって, $x > 4$

式を変形し $\log_2 (x-1)(x-4) > \log_2 4$

底が1より大きいから

$$(x-1)(x-4) > 4$$

$$x^2 - 5x > 0$$

$$x(x-5) > 0 \quad \text{より} \quad x < 0, \quad 5 < x$$

したがって, $5 < x$

問題 $\log_3 (x-4) + \log_3 (x-2) > 1$

例題 $\log \frac{1}{3} x + \log \frac{1}{3} (x+2) > -1$

真数が正より $x > 0$ かつ $x+2 > 0$

よって, $x > 0$

式を変形し $\log \frac{1}{3} x(x+2) > \log \frac{1}{3} 3$

底が1より小さいから 不等号の向きが変わる

$$x(x+2) < 3$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$(x-1)(x+3) < 0 \quad \text{より} \quad -3 < x < 1$$

したがって, $0 < x < 1$

問題 $\log \frac{1}{2} (x+2) + \log \frac{1}{2} (x+3) > -1$

1. 次の対数不等式を解きなさい。 底が1より大
 Solve the following logarithmic inequality.

2. 次の対数不等式を解きなさい。 底が1より小
 Solve the following logarithmic inequality.

例題 $\log_2 x(x+3) < 2$

真数が正より $x(x+3) > 0$, $x < -3$ または $0 < x$
式を変形し $\log_2 x(x+3) < \log_2 4$
底が1より大きいから

$$x(x+3) < 4 \quad , \quad x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$(x-1)(x+4) < 0 \quad \text{より} \quad -4 < x < 1$$

したがって, $-4 < x < -3$, $0 < x < 1$

例題 $\log \frac{1}{2} x(x+2) < -3$

真数が正より $x(x+2) > 0$, $x < -2$ または $0 < x$
式を変形し $\log \frac{1}{2} x(x-1) < \log \frac{1}{2} 8$
底が1より小さいから 不等号の向きが変わる

$$x(x+2) > 8 \quad , \quad x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$(x-2)(x+4) > 0 \quad \text{より} \quad x < -4 \quad , \quad 2 < x$$

したがって, $x < -4$, $2 < x$

問題 $\log_3 x(x+8) < 2$

問題 $\log \frac{1}{3} x(x+8) < -2$

例題 $\log_2 (x-3) + \log_2 (x-6) < 2$

真数が正より $x-3 > 0$ かつ $x-6 > 0$
 よって, $x > 6$
式を変形し $\log_2 (x-3)(x-6) < \log_2 4$
底が1より大きいから

$$(x-3)(x-6) < 4$$

$$x^2 - 9x + 14 < 0$$

$$(x-2)(x-7) < 0 \quad \text{より} \quad 2 < x < 7$$

真数条件より, $6 < x < 7$

例題 $\log \frac{1}{3} (x+1) + \log \frac{1}{3} (x+3) < -1$

真数が正より $x+1 > 0$ かつ $x+3 > 0$
 よって, $x > -1$
式を変形し $\log \frac{1}{3} (x+1)(x+3) < \log \frac{1}{3} 3$
底が1より小さいから 不等号の向きが変わる

$$(x+1)(x+3) > 3$$

$$x^2 + 4x > 0$$

$$x(x+4) > 0 \quad \text{より} \quad x < -4 \quad , \quad 0 < x$$

真数条件より, $x > 0$

問題 $\log_2 (x-1) + \log_2 (x-4) < 2$

問題 $\log \frac{1}{2} (x+1) + \log \frac{1}{2} (x+3) < -3$

1. 次の式を証明せよ。

Prove the following formula.

2. 次の式の値を求めよ。 Find the value of the following expression.

例題 $2^X = 3^Y = 6^Z, X, Y, Z \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{Z}$$

6を底とする対数をとれば,

$$\log_6 2^X = \log_6 3^Y = \log_6 6^Z$$

したがって

$$X \log_6 2 = Z, X = \frac{Z}{\log_6 2}$$

$$Y \log_6 3 = Z, Y = \frac{Z}{\log_6 3}$$

$$\frac{1}{X} = \frac{\log_6 2}{Z} \quad \frac{1}{Y} = \frac{\log_6 3}{Z}$$

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$$

$$= \frac{\log_6 2}{Z} + \frac{\log_6 3}{Z} = \frac{\log_6 6}{Z} = \frac{1}{Z}$$

問題 $2^X = 5^Y = 10^Z, X, Y, Z \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{Z}$$

例題 $2^X = 3^Y = 7$ のとき, $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$ を求めよ。

7を底とする対数をとれば,

$$\log_7 2^X = \log_7 3^Y = \log_7 7 = 1$$

したがって

$$X \log_7 2 = 1, X = \frac{1}{\log_7 2}$$

$$Y \log_7 3 = 1, Y = \frac{1}{\log_7 3}$$

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \log_7 2 + \log_7 3 = \log_7 6$$

問題 $3^X = 5^Y = 15^Z = 10$ のとき, $\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} - \frac{1}{Z}$ を求めよ。

問題 $36^X = 9^Y = \sqrt[3]{4}$ のとき $\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}$ を求めよ。