

数学 対数の性質 ()年()組()番()

対数の性質

$a > 0, a \neq 1$ として, a を底とする対数の性質を調べる。

$$a^0 = 1, a^1 = a \text{ であるから, } \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$p = \log_a M, q = \log_a N \text{ とおくと } M = a^p, N = a^q$$

$$MN = a^p \times a^q = a^{p+q}, \frac{M}{N} = a^p \div a^q = a^{p-q}$$

$$\text{ゆえに, 対数の定義により } \log_a MN = p + q = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$$

$$M = a^p \text{ の両辺を } r \text{ 乗すると, } M^r = (a^p)^r = a^{pr}$$

$$\text{ゆえに, 対数の定義により } \log_a M^r = pr = r \log_a M$$

$a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ のとき

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N, \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^r = r \log_a M$$

対数の性質

問題 A 次の等式を証明せよ。

$$(1) \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

$$(2) \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

底の変換公式

$a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$ のとき $\log_a b = m$ とおくと $b = a^m$ になる。

c を底とする対数をとると $\log_c b = m \times \log_c a = \log_a b \times \log_c a$

$$\log_c a \neq 0 \text{ より } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

底の変換公式

$$a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1 \text{ のとき } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

問題 B 次の等式を証明せよ。

$$(1) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$(2) \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$$

問題 C 次の値を求めよ。

$$(1) \log_2 32$$

$$(2) \log_{10} 10\sqrt{10}$$

$$(3) \log_{\frac{1}{3}} 243$$

問題 D 次の計算をせよ。

$$(1) \log_{10} 20 + \log_{10} 50$$

$$(2) \log_3 18 - \log_3 2$$

$$(3) 2 \log_3 6 - \log_3 4$$

応用問題 E $\log_2 2\sqrt{3} + \log_4 \frac{2}{3}$ を簡単にせよ。(最初に底を揃える方法もある)

$$\log_2 2\sqrt{3} + \log_4 \frac{2}{3} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{3} + \log_4 2 - \log_4 3$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{\log_2 2}{\log_2 4} - \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = 1 + \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{2} - \frac{\log_2 3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \log_2 3$$

応用問題 F $\log_{10} 2 = a, \log_{10} 3 = b$ とするとき, 次の式を a, b で表せ。

$$(1) \log_{10} 6$$

$$(2) \log_{10} 5$$

$$(3) \log_2 9$$

問題 G 方程式 $\log_2 (X+2) + \log_2 (X-1) = 2$ を解け。

対数の真数は正であるから $X+2 > 0, X-1 > 0$ ゆえに $X > 1$

$$\log_2 (X+2) + \log_2 (X-1) = \log_2 (X+2)(X-1) = 2 = \log_2 4$$

ゆえに, $(X+2)(X-1) = 4$, これを解いて $X = 1$ または $X = 3$

$X > 1$ であるから $X = 3$ になる。

応用問題 H 次の不等式を解け。

$$(1) \log_2 X < 3$$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} X > \log_{\frac{1}{2}} 27$$

対数の真数は正であるから

対数の真数は正であるから