数学Ⅱ　指数の拡張　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

指数

$a = a^1$, $a\times a = a^2$, $a\times a\times a = a^3$, $a\times a\times a\times a = a^4$, ･･･の様に，$a$ を n 回掛けたものを
(a 　)と書き，a の n 乗といい，n を(a^n の　　　)という。

また，a^1, a^2, a^3, a^4, ･･･をまとめて，a の累乗という。

$a^2\times a^3 = (a\times a)\times(a\times a\times a) =$ (a 　　)　　　指数法則　$a^m\times a^n = a^{m+n}$

$(a^3)^2 = a^3\times a^3 = (a\times a\times a)\times(a\times a\times a) =$ (a 　　)　　　$(a^m)^n = a^{m\times n}$

$(ab)^3 = (a\times b)\times(a\times b)\times(a\times b) =$ (a 　 b 　)　　　$(ab)^n = a^n b^n$

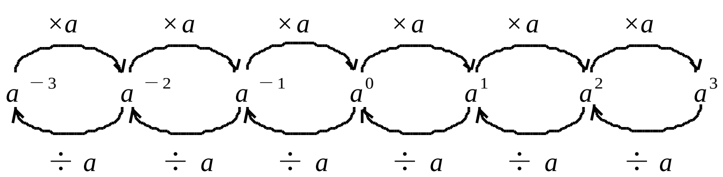
$a^3 \div a^2 = \dfrac{\cancel{a}\times\cancel{a}\times a}{\cancel{a}\times\cancel{a}} =$ (a 　)　　　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

問題 A　次の計算をせよ。

(1) $a^6\times a^9$　　(2) $(a^4)^8$　　(3) $(2xy^2)^3$　　(4) $(2xy^2)^3 \div xy^2$

0や負の指数

a の累乗の関係を考えると，a を掛けると指数が増え，a で割ると指数が減る。
この約束を 0 や負の数にも拡張する。　($a \neq 0$ のとき)



したがって，$a^0 = a^1 \div a =$ 　 , $a^{-1} = a^0 \div a =$ 　 $\div a =$ ―― ,　$a^{-2} = a^{-1} \div a =$ ――

$a \neq 0$ で，n が整数のとき，$a^0 =$ 　　, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

問題 B　定義にしたがって，次の値を求めよ。

(1) 2^0　　(2) 2^{-1}　　(3) $(-2)^{-1}$　　(4) 10^{-2}

問題 C　次の計算をせよ。

(1) $a^2\times a^{-3}$　　(2) $(a^{-1})^2$　　(3) $(a^{-2})^{-2}$　　(4) $a^2 \div a^{-2}$

累乗根

2 乗(平方)して a になる数，すなわち $x^2 = a$ になる数 x を a の平方根といい，
正の数を(　　　　)，負の数を$-\sqrt{a}$ と表す。

n が 2 以上の整数であるとき，n 乗して a になる数，すなわち $x^n = a$ になる数 x を
a の　　乗根といい，$\sqrt[n]{a}$ と表す。($a > 0$)

2 乗根(平方根), 3 乗根(立方根), 4 乗根,･･･をまとめて(　　　　　　　)という。

問題 D　次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[2]{36}$　　(2) $\sqrt[3]{27}$　　(3) $\sqrt[4]{625}$　　(4) $\sqrt[5]{32}$

累乗根の性質

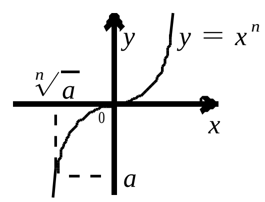
$a > 0$, $b > 0$ で，m，n が正の整数であるとき，

$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

実数 a の n 乗根について，次のことが分かっている。

① n が奇数のとき

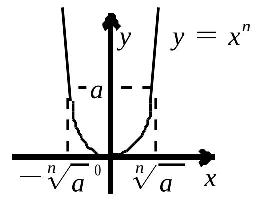
a の正負にかかわらず，(　　個)ある。



$a<0$ のときも $\sqrt[n]{a}$

② n が偶数のとき

$a>0$ のとき，$-\sqrt[n]{a}$ と $\sqrt[n]{a}$ の(　　個)ある。



負の数の n 乗根はない。

また，n が奇数・偶数でも $\sqrt[n]{0} =$ 　　である。

問題 E　次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{-8}$　　(2) 1000 の立方根　　(3) 256 の 4 乗根

問題 F　次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}$　　(2) $\sqrt[4]{32}\div\sqrt[4]{2}$　　(3) $\sqrt[3]{8^2}$　　(4) $(\sqrt[6]{4})^3$

数学Ⅱ　分数の指数　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

分数の指数

m, n が整数のとき，指数法則 $(a^m)^n = a^{m\times n}$ が成り立っている。

ここで，$a > 0$ として，指数 m, n を整数から分数にまで拡張させて考える。

$m=\frac{1}{2}$，$n=2$ のとき，$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{1}{2}\times\quad} = a^1 = a$

$a^{\frac{1}{2}}$ は a の平方根，すなわち a の(　　乗根)になる。　$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$

$m=\frac{2}{3}$，$n=3$ のとき，$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^{\frac{2}{3}\times(\quad)} = (a\quad)$

$a^{\frac{2}{3}}$ は a^2 の(　　乗根)になる。　$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

したがって，$a > 0$ で，m が整数，n が正の整数のとき，

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$　　とくに，$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 =$　　　$4^{-\frac{1}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = (\sqrt{4})^{-1} = 2^{-1} =$

問題A　次の数を，根号を使って表しなさい。

(1) $7^{\frac{2}{3}}$　　(2) $5^{\frac{1}{4}}$　　(3) $3^{\frac{1}{3}}$　　(4) $3^{-\frac{1}{3}}$

問題B　次の数を，分数の指数を使って表しなさい。

(1) $\sqrt[5]{4^2}$　　(2) $\sqrt[6]{10}$　　(3) $\sqrt[4]{3^2}$　　(4) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}$

問題C　次の値を求めよ。

(1) $81^{\frac{1}{4}}$　　(2) $8^{\frac{2}{3}}$　　(3) $9^{-\frac{3}{2}}$　　(4) $25^{0.5}$

分数の指数法則

$a > 0$ のとき，指数の定義から，

$$a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{6}}a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^2}\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^2\times a^3} = \sqrt[6]{a^{2+3}} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$$

したがって，指数法則を有理数に拡張しても成り立つことが分かる。

無理数の指数

無理数の指数も極限の考えを使えば求めることができる。

$a > 0$ のとき，$a^{\sqrt{2}}$ を考える。$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ だから

$a^1, a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, a^{1.41421}, a^{1.414213}, \cdots$ の近づく値と定義できる。

問題D　次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$　　(2) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

(3) $\sqrt[6]{a}\ \sqrt[3]{a}$　　(4) $\sqrt[3]{a^2}\ \sqrt[6]{a^5}$

(5) $\sqrt{a} \div \sqrt[3]{a}$　　(6) $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[6]{a}$

問題E　次の等式が成り立つような x の値を求めなさい。

(1) $2^x = 4^2$　　(2) $4^x = 32$