数学Ⅱ　軌跡　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P that satisfies the following conditions.

例題　2 点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$に対して，$AP^2 - BP^2 = 8$

点 P の座標を(x, y)とする。

$AP^2 = \left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2$

$BP^2 = \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 - 2x + 1 + y^2$

$AP^2 - BP^2$

$= (x^2 + 2x + 1 + y^2) - (x^2 - 2x + 1 + y^2)$

$= 4x = 8$

整理すると　$x = 2$

よって点 P は直線 $x = 2$ 上にある。

逆に，この直線上の全ての点は $AP^2 - BP^2 = 8$ を満たす。

よって，点 P の軌跡は $x = 2$ である。

問題　2 点 $A(0, -1)$, $B(0, 1)$に対して，$AP^2 - BP^2 = 12$

2. 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P that satisfies the following conditions.

例題　点 $A(2, 0)$からの距離 distance と点 $B(-1, 0)$からの距離 distance の比 ratio が 2：1 である点 P の軌跡 locus of point を求めよ。

点 P の座標を(x, y)とすると，

$AP : BP = 2 : 1$ より　$AP = 2BP$,　$AP^2 = 4BP^2$

$AP^2 = \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 - 4x + 4 + y^2$

$BP^2 = \left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2$

$AP^2 = 4BP^2$ に代入して

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$

$3x^2 + 12x + 2y^2 = 0$

$x^2 + 4x + y^2 = 0$

$(x+2)^2 + y^2 = 2^2$

点 P は円$(x+2)^2 + y^2 = 2^2$ 上にある。

逆に，この円上の全ての点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は点$(-2, 0)$を中心とする半径 2の円である。

問題　点 $A(1, 0)$からの距離と点 $B(4, 0)$からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡を求めよ。

数学Ⅱ　軌跡 2　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

1. 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P that satisfies the following conditions.

例題　2 点 A$(-1, 0)$, B$(1, 0)$に対して，$AP^2 + BP^2 = 10$

点 P の座標を(x, y)とする。

$AP^2 = \left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 + 2x + 1 + y^2$

$BP^2 = \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 - 2x + 1 + y^2$

$AP^2 + BP^2$

$= (x^2 + 2x + 1 + y^2) + (x^2 - 2x + 1 + y^2)$

$= 2x^2 + 2y^2 + 2 = 10$

整理すると　$x^2 + y^2 = 4$

点 P は円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にある。逆に，この円上の全ての点は $AP^2 + BP^2 = 10$ を満たす。

よって，点 P の軌跡は点$(0, 0)$を中心とする半径 2の円である。

問題　2 点 A$(-2, 0)$, B$(2, 0)$に対して，$AP^2 + BP^2 = 16$

2. 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P that satisfies the following conditions.

例題　点 A$(6, 0)$からの距離と点 B$(-2, 0)$からの距離の比が 3：1 である点 P の軌跡を求めよ。
(distance / distance / ratio)

点 P の座標を(x, y)とすると，

AP：BP = 3：1 より AP = 3 BP,　$AP^2 = 9BP^2$

$AP^2 = \left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 - 12x + 36 + y^2$

$BP^2 = \left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 + 4x + 4 + y^2$

$AP^2 = 9BP^2$ に代入して

$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 9(x^2 + 4x + 4 + y^2)$

$8x^2 + 48x + 8y^2 = 0$

$x^2 + 6x + y^2 = 0$

$(x+3)^2 + y^2 = 3^2$

点 P は 円$(x+3)^2 + y^2 = 3^2$ 上にある。

逆に，この円上の全ての点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は点$(-3, 0)$を中心とする半径 3の円である。

問題　点 A$(1, 0)$からの距離と点 B$(9, 0)$からの距離の比が 3：1 である点 P の軌跡を求めよ。

1．次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P that satisfies the following conditions.

例題　2 点 A(0 , 2), B(4 , 0)に対して，AP = BP

点 P の座標を(x , y)とする。

$\mathrm{AP}^2 = \left(\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}\right)^2$

$= x^2 + y^2 - 4y + 4$

$\mathrm{BP}^2 = \left(\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 - 8x + 16 + y^2$

AP = BP であるから　$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2$

$\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2$

$= \left(x^2 + y^2 - 4y + 4\right) - \left(x^2 - 8x + 16 + y^2\right)$

$= 8x - 4y - 12 = 0$

整理すると　$2x - y - 3 = 0$ ，　$y = 2x - 3$

よって，点 P は直線 $y = 2x - 3$ 上にある。

逆に，この直線上の全ての点は条件 AP = BP を満たす。

よって，点 P の軌跡は $y = 2x - 3$ である。

問題　2 点 A(0 , 1), B(0 , 3)に対して，AP = BP

2．次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。
Find the locus of point P that satisfies the following conditions.

例題　点 A(3 , 0)からの距離と点 B(−2 , 0)からの距離 distance の比 ratio が 3：2 である点 P の軌跡を求めよ。

点 P の座標を(x , y)とする。

AP：BP ＝3：2 より 2 AP ＝3 BP,　$4\,\mathrm{AP}^2 = 9\,\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{AP}^2 = \left(\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 - 6x + 9 + y^2$

$\mathrm{BP}^2 = \left(\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2}\right)^2$

$= x^2 + 4x + 4 + y^2$

$4\,\mathrm{AP}^2 = 9\,\mathrm{BP}^2$ に代入して

$4\left(x^2 - 6x + 9 + y^2\right) = 9\left(x^2 + 4x + 4 + y^2\right)$

$5x^2 + 60x + 5y^2 = 0$

$x^2 + 12x + y^2 = 0$ ，$(x+6)^2 + y^2 = 6^2$

点 P は円$(x+6)^2 + y^2 = 6^2$ 上にある。

逆に，この円上の全ての点は条件を満たす。

よって，点 P の軌跡は点(−6, 0)を中心とする半径 6の円である。

問題　点 A(4 , 0)からの距離と点 B(−2 , 0)からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡を求めよ。

数学Ⅱ　軌跡(線分の中点)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題① 点Qが $x^2+y^2=4$ 上を動くとき，点A$(6,0)$と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

When point Q moves on $x^2+y^2=4$, find the locus of the midpoint P of the line segment AQ connecting point A (6, 0) and point Q.

点Qの座標を(s,t)とすると，$s^2+t^2=4$

点Pの座標を(x,y)とすると，

点PはAQの中点より，

$$x=\frac{s+6}{2},\qquad s=2x-6$$

$$y=\frac{t+0}{2},\qquad t=2y$$

s,tを円の方程式に代入して

$$(2x-6)^2+(2y)^2=4$$

式を整理して

$$(x-3)^2+y^2=1$$

よって，点Pは円$(x-3)^2+y^2=1$上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

求める軌跡は，点$(3,0)$を中心とする半径1の円である。

問題① 点Qが $x^2+y^2=8$ 上を動くとき，点A$(0,8)$と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

例題② 点Qが $y=x^2$ 上を動くとき，点A$(4,0)$と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

When point Q moves on $y=x^2$, find the locus of the midpoint P of the line segment AQ connecting point A (4, 0) and point Q.

点Qの座標を(s,t)とすると，$t=s^2$

点Pの座標を(x,y)とすると，

点PはAQの中点より，

$$x=\frac{s+4}{2},\qquad s=2x-4$$

$$y=\frac{t+0}{2},\qquad t=2y$$

s,tを放物線の方程式に代入して

$$2y=(2x-4)^2$$

式を整理して

$$y=2(x-2)^2$$

よって，点Pは放物線$y=2(x-2)^2$上にある。

逆に，この放物線上のすべての点は条件を満たす。

求める軌跡は$y=2x^2$の頂点を点$(2,0)$に平行移動した放物線である。

問題② 点Qが $y=x^2$ 上を動くとき，点A$(0,4)$と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

数学Ⅱ　軌跡(線分の中点) 2　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

例題① 点Qが $x^2 + y^2 = 12$ 上を動くとき，点A(8, 0)と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

When point Q moves on $x^2 + y^2 = 12$, find the locus of the midpoint P of the line segment AQ connecting point A (8, 0) and point Q.

点Qの座標を(s, t)とすると，$s^2 + t^2 = 12$

点Pの座標を(x, y)とすると，

点PはAQの中点より，

$$x = \frac{s+8}{2}, \quad s = 2x - 8$$

$$y = \frac{t+0}{2}, \quad t = 2y$$

s, t を円の方程式に代入して

$$(2x - 8)^2 + (2y)^2 = 12$$

式を整理して

$$(x-4)^2 + y^2 = 3$$

よって，点Pは円$(x-4)^2 + y^2 = 3$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

求める軌跡は，点$(4, 0)$を中心とする半径$\sqrt{3}$の円である。

問題① 点Qが $x^2 + y^2 = 16$ 上を動くとき，点A(6, 0)と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

例題② 点Qが $y = \dfrac{x^2}{2}$ 上を動くとき，点A(2, 0)と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

When point Q moves on $y = 0.5x^2$ find the locus of the midpoint P of the line segment AQ connecting point A (2, 0) and point Q.

点Qの座標を(s, t)とすると，$t = \dfrac{s^2}{2}$

点Pの座標を(x, y)とすると，

点PはAQの中点より，

$$x = \frac{s+2}{2}, \quad s = 2x - 2$$

$$y = \frac{t+0}{2}, \quad t = 2y$$

s, t を放物線の方程式に代入して

$$2y = \frac{(2x-2)^2}{2}$$

式を整理して $y = (x-2)^2$

よって，点Pは放物線 $y = (x-2)^2$ 上にある。

逆に，この放物線上のすべての点は条件を満たす。

求める軌跡は $y = x^2$ の頂点を点$(2, 0)$に平行移動した放物線である。

問題② 点Qが $y = \dfrac{x^2}{2}$ 上を動くとき，点A(4, 0)と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

例題① 点Qが $x^2+y^2=9$ 上を動くとき，点 $A(6,0)$ と点Qを結ぶ線分AQを $2:1$ に内分する点Pの軌跡を求めよ。

When point Q moves on $x^2+y^2=9$, find the locus of point P that internally divides the line segment AQ connecting point A (6, 0) and point Q at a ratio of 2 : 1.

点Qの座標を(s, t)とすると，$s^2+t^2=9$
点Pの座標を(x, y)とすると，
点PはAQを内分する点であるから

$$x=\frac{2s+6}{3},\quad 2s=3x-6$$

$$y=\frac{2t+0}{3},\quad 2t=3y$$

$s^2+t^2=9$ より $(2s)^2+(2t)^2=36$

$(3x-6)^2+(3y)^2=36$

式を整理して $(x-2)^2+y^2=4$

よって，点Pは円$(x-2)^2+y^2=4$ 上にある。
逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。
求める軌跡は，点$(2, 0)$を中心とする半径2の円である。

問題① 点Qが $x^2+y^2=16$ 上を動くとき，点 $A(8,0)$ と点Qを結ぶ線分AQを $3:1$ に内分する点Pの軌跡を求めよ。

例題② 点Qが $y=2x^2$ 上を動くとき，点 $A(6,0)$ と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。

When point Q moves on $y=2x^2$, find the locus of the midpoint P of the line segment AQ connecting point A (6, 0) and point Q.

点Qの座標を(s, t)とすると，$t=2s^2$
点Pの座標を(x, y)とすると，
点PはAQの中点より，

$$x=\frac{s+6}{2},\quad s=2x-6$$

$$y=\frac{t+0}{2},\quad t=2y$$

s, tを放物線の方程式に代入して

$2y=2(2x-6)^2$

式を整理して

$y=(2x-6)^2$　，$y=4(x-3)^2$

よって，点Pは放物線 $y=4(x-3)^2$ 上にある。
逆に，この放物線上のすべての点は条件を満たす。
求める軌跡は $y=4x^2$ の頂点を点$(3, 0)$に平行移動した放物線である。

問題② 点Qが $y=2x^2$ 上を動くとき，点 $A(0,2)$ と点Qを結ぶ線分AQの中点Pの軌跡を求めよ。