

1. 次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

Find the coordinates of the common point between the following circle and straight line.

例題

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ と } y = 2x - 5$$

円の方程式に $y = 2x - 5$ を代入する。
equation of circle substitute

$$x^2 + (2x - 5)^2 = 10$$

$$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 10$$

$$5x^2 - 20x + 15 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

よって, $x = 1, 3$

$x = 1$ のとき, $y = 2 \times 1 - 5 = -3$

$x = 3$ のとき, $y = 2 \times 3 - 5 = 1$

共有点の座標は $(1, -3), (3, 1)$

問題

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ と } y = 3x - 10$$

問題

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ と } y = x + 2$$

2. 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。

Find the number of common points between the following circles and straight lines.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} D > 0 \\ D = 0 \\ D < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{共有点} & 2\text{個} \\ \text{共有点} & 1\text{個} \\ \text{共有点} & 0\text{個} \end{matrix}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

例題

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ と } y = x + 6$$

円の方程式に $y = x + 6$ を代入する。
equation of circle substitute

$$x^2 + (x + 6)^2 = 10$$

$$x^2 + x^2 + 12x + 36 = 10$$

$$2x^2 + 12x + 26 = 0$$

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

この2次方程式の判別式 D は
Discriminant of this quadratic equation

$$D = 6^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 < 0$$

この円と直線は共有点をもたない。

問題

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ と } y = x - 5$$

問題

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ と } y = -3x + 10$$

問題

$$x^2 + y^2 = 10 \text{ と } y = 2x + 6$$

1. 次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

例題

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ と } y = x - 1$$

円の方程式に $y = x - 1$ を代入する。

$$x^2 + (x - 1)^2 = 5$$
$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$$
$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

よって, $x = -1, 2$

$x = -1$ のとき, $y = -1 - 1 = -2$

$x = 2$ のとき, $y = 2 \times 2 - 5 = 1$

共有点の座標は $(-1, -2), (2, 1)$

問題

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ と } y = x + 3$$

問題

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ と } y = 2x - 5$$

2. 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} D > 0 & \text{共有点 } 2 \text{ 個} \\ D = 0 & \text{共有点 } 1 \text{ 個} \\ D < 0 & \text{共有点 } 0 \text{ 個} \end{cases}$$
$$D = b^2 - 4ac$$

例題

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ と } y = -2x + 5$$

円の方程式に $y = -2x + 5$ を代入する。

$$x^2 + (-2x + 5)^2 = 5$$
$$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 5$$
$$5x^2 - 20x + 20 = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

この2次方程式の判別式 D は

$$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$$

この円と直線は共有点が 1 個である。

問題

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ と } y = x + 1$$

問題

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ と } y = 2x + 6$$

問題

$$x^2 + y^2 = 5 \text{ と } y = -x + 3$$

1. 次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

例題 $x^2 + y^2 = 20$ と $y = 3x - 10$

円の方程式に $y = 3x - 10$ を代入する。

$$x^2 + (3x - 10)^2 = 20$$
$$x^2 + 9x^2 - 60x + 100 = 20$$
$$10x^2 - 60x + 80 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x - 2)(x - 4) = 0$$

よって, $x = 2, 4$

$x = 2$ のとき, $y = 2 \times 3 - 10 = -4$

$x = 4$ のとき, $y = 4 \times 3 - 10 = 2$

共有点の座標は $(2, -4), (4, 2)$

問題 $x^2 + y^2 = 20$ と $y = 2x - 10$

問題 $x^2 + y^2 = 20$ と $y = x + 2$

2. 次の円と直線の共有点の個数を求めよ。

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} D > 0 & \text{共有点 } 2 \text{ 個} \\ D = 0 & \text{共有点 } 1 \text{ 個} \\ D < 0 & \text{共有点 } 0 \text{ 個} \end{cases}$$
$$D = b^2 - 4ac$$

例題 $x^2 + y^2 = 20$ と $y = x + 6$

円の方程式に $y = x + 6$ を代入する。

$$x^2 + (x + 6)^2 = 20$$
$$x^2 + x^2 + 12x + 36 = 20$$
$$2x^2 + 12x + 16 = 0$$
$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

この2次方程式の判別式 D は

$$D = 6^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 > 0$$

この円と直線は共有点が 2 個

問題 $x^2 + y^2 = 20$ と $y = x + 8$

問題 $x^2 + y^2 = 20$ と $y = -3x + 10$

問題 $x^2 + y^2 = 20$ と $y = 2x + 10$

1. 次の円の半径を求めよ。

例題 円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $x + 2y - 5 = 0$ が接するとき、半径 r の値を求めよ。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ の中心は原点であり、原点と直線 $x + 2y - 5 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

直線と円が接するとき、 $r = d$ となるので $r = \sqrt{5}$ になる。

問題 円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $x + 3y - 10 = 0$ が接するとき、半径 r の値を求めよ。

2. 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

例題 円 $x^2 + y^2 = 5$, P(2, 1)

$$2 \times x + 1 \times y = 5 \quad \text{すなわち} \quad 2x + y = 5$$

問題 円 $x^2 + y^2 = 25$, P(3, 4)

例題 円 $x^2 + y^2 = 10$, P(3, -1)

$$3 \times x + (-1) \times y = 10 \quad \text{すなわち} \quad 3x - y = 10$$

問題 円 $x^2 + y^2 = 13$, P(3, -2)

例題 円 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$, P(2, -1)

$$(2 + 1) \times (x + 1) + (-1 + 2) \times (y + 2) = 10$$

すなわち $3x + y = 5$

問題 円 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$, P(0, 3)

3. 次の点を通り、与えられた円に接する接線の方程式を求めよ。

例題 点(4, 2), $x^2 + y^2 = 10$

接点を P(p, q) とすると、P は円上にあるから $p^2 + q^2 = 10$

P における円の接線の方程式は $px + qy = 10$

接線が点(4, 2)を通るから $4p + 2q = 10$

したがって $q = -2p + 5$

p, q の連立方程式を解く。

$$p^2 + (-2p + 5)^2 = 10$$
$$5p^2 - 20p + 15 = 0$$
$$p^2 - 4p + 3 = (p - 1)(p - 3) = 0$$

よって $p = 1, 3$

$p = 1$ のとき $q = 3$

$p = 3$ のとき $q = -1$

接点(1, 3) のとき、接線 $x + 3y = 10$,

接点(3, -1) のとき、接線 $3x - y = 10$,

問題 点(3, -1), $x^2 + y^2 = 5$

1. 次の円の半径を求めよ。

3. 次の点を通り，与えられた円に接する接線の方程式を求めよ。

例題

円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $3x + 2y - 13 = 0$ が接するとき，半径 r の値を求めよ。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ の中心は原点であり，原点と直線 $3x + 2y - 5 = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|-13|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

直線と円が接するとき， $r = d$ となるので

$$r = \sqrt{13}$$
 になる。

問題

円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $3x + 4y - 10 = 0$ が接するとき，半径 r の値を求めよ。

2. 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

例題

円 $x^2 + y^2 = 10$, P(1, 3)

$$1 \times x + 3 \times y = 10 \quad \text{すなわち} \quad x + 3y = 10$$

問題

円 $x^2 + y^2 = 13$, P(3, 2)

例題

円 $x^2 + y^2 = 4$, P(2, 0)

$$2 \times x + 0 \times y = 4 \quad \text{すなわち} \quad x = 2$$

問題

円 $x^2 + y^2 = 9$, P(3, 0)

例題

円 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$, P(2, 1)

$$(2 + 1) \times (x + 1) + (1 - 2) \times (y - 2) = 10$$

すなわち $3x - y = 5$

問題

円 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$, P(3, 1)

例題

点(1, 7), $x^2 + y^2 = 25$

接点を P(p, q) とすると，P は円上にあるから

$$p^2 + q^2 = 25$$

P における円の接線の方程式は $px + qy = 25$

接線が点(1, 7)を通るから $p + 7q = 25$

したがって $p = -7q + 25$

p, q の連立方程式を解く。

$$(-7q + 25)^2 + q^2 = 25$$
$$50q^2 - 350q + 600 = 0$$
$$q^2 - 7q + 12 = (q - 3)(q - 4) = 0$$

よって $q = 3, 4$

$q = 3$ のとき $p = 4$

$q = 4$ のとき $p = -3$

接点(3, 4) のとき，接線 $3x + 4y = 25$

接点(4, -3) のとき，接線 $4x - 3y = 25$

問題

点(1, 5), $x^2 + y^2 = 13$

1. 次の円の半径を求めよ。

3. 次の点を通り，与えられた円に接する接線の方程式を求めよ。

例題

円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $2x + y - 10 = 0$ が接するとき，半径 r の値を求めよ。
円 $x^2 + y^2 = r^2$ の中心は原点であり，原点と直線 $2x + y - 10 = 0$ の距離 d は
$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$
 直線と円が接するとき， $r = d$ となるので $r = 2\sqrt{5}$ になる。

問題

円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $4x + 3y - 25 = 0$ が接するとき，半径 r の値を求めよ。

2. 次の円上の点 P における接線の方程式を求めよ。

例題

円 $x^2 + y^2 = 10$, P(3, 1)
 $3 \times x + 1 \times y = 10$ すなわち $3x + y = 10$

問題

円 $x^2 + y^2 = 13$, P(2, 3)

例題

円 $x^2 + y^2 = 8$, P(2, -2)
 $2 \times x + (-2) \times y = 8$ すなわち $x - y = 4$

問題

円 $x^2 + y^2 = 18$, P(3, -3)

例題

円 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$, P(1, -1)
 $(1 + 1) \times (x + 1) + (-1 + 2) \times (y + 2) = 5$
すなわち $2x + y = 1$

問題

円 $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$, P(2, 4)

例題

点(7, -1), $x^2 + y^2 = 25$
接点を P(p, q) とすると，P は円上にあるから $p^2 + q^2 = 25$
P における円の接線の方程式は $px + qy = 25$
接線が点(7, -1)を通るから $7p - q = 25$
したがって $q = 7p - 25$
 p, q の連立方程式を解く。
 $p^2 + (7p - 25)^2 = 25$
 $50p^2 - 350p + 600 = 0$
 $p^2 - 7p + 12 = (p - 3)(p - 4) = 0$
よって $p = 3, 4$
 $p = 3$ のとき $q = -4$
 $p = 4$ のとき $q = 3$
接点(3, -4) のとき，接線 $3x - 4y = 25$,
接点(4, 3) のとき，接線 $4x + 3y = 25$,

問題

点(6, -2), $x^2 + y^2 = 20$