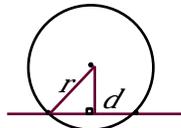


数学 円と直線 ()年()組()番()

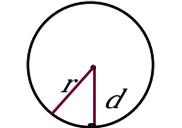
円と直線の共有点

円の中 心から直 線までの距離 d と円の半径 r との関係調べ。
 円と直 線の方程式から y を消 去し、2次方程式の判別式との対応も調べ。

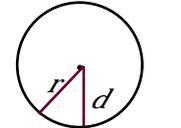
- (1) 異なる2点で交わる (2) 接する (3) 交わらない



$(r > d)$
 (共有点 2個)
 $(D > 0)$



$(r = d)$
 (共有点 1個)
 $(D = 0)$



$(r < d)$
 (共有点 0個)
 $(D < 0)$

問題 A 円 $x^2 + y^2 = 2$ と次の直線との共有点の個数を調べよ。

- (1) $x + y - 2 = 0$ (直線と円の中 心との距離)

円の中 心(0, 0)から直線までの距離 d は

$$d = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(円の半径 r は $\sqrt{2}$ だから $d = r$) したがって 共有点の数は(1)個

- (2) $x - y + 1 = 0$ (判別式)

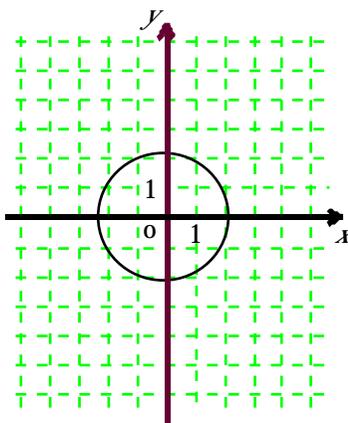
直線の式は $(y = x - 1)$ これを円の方程式に代入して

$$x^2 + (x - 1)^2 = 2 \quad \text{式を整理すると} \quad (x^2 - x + 1) = 0 \quad \text{になる。}$$

$$\text{判別式 } D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$$

したがって 共有点の数は(0)個

問題 B 円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = 2x + k$ が接するとき、 k の値を求めよ。



問題 C 円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $y = x + 1$ との共有点の座標を求めよ。

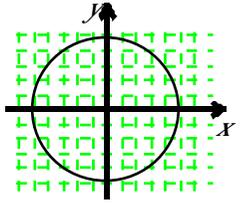
$x^2 + y^2 = 25$ に $y = x + 1$ を代入して

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25 \quad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0 \quad \text{を解き、}$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad (x + 4)(x - 3) = 0 \quad \text{より } x =$$

$$x = -4 \quad \text{のとき } y = -3 \quad x = 3 \quad \text{のとき } y = 4$$



円の接線の方程式

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式を求める。
 接点 P が座標軸上にないとする。接線は OP に垂直である。

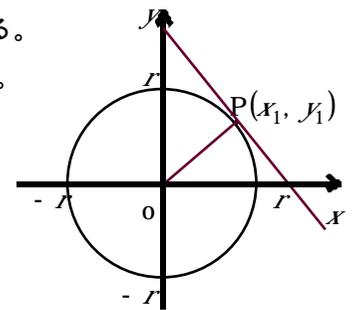
OP の傾きは $\frac{y_1}{x_1}$ 、接線の傾きは $-\frac{x_1}{y_1}$ になる。

よって、接線の方程式は $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

これを变形して $x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$

点 $P(x_1, y_1)$ は円上の点だから $(x_1)^2 + (y_1)^2 = r^2$ となる。

したがって、接線の方程式は $(x_1x + y_1y = r^2)$



問題 D 与えられた円周上の点における接線の方程式を求めよ。

- (1) $x^2 + y^2 = 25$ 上の点(3, -4) (2) $x^2 + y^2 = 5$ 上の点(-1, 2)

問題 E 円外の点(15, 5)から円 $x^2 + y^2 = 25$ にひいた接線の方程式を求めよ。

接点を (x_1, y_1) とおくと接線の方程式は

$$x_1x + y_1y = 25 \quad \dots$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 25 \quad \dots$$

との連立方程式を解く。

接点が(,)のとき

接点が(,)のとき