

数学 点と直線の距離 ()年()組()番()

点と直線の距離

点 $P(x_1, y_1)$ から直線 $ax + by + c = 0$ 上におろした垂線の足を $H(X, Y)$ とする。

直線 $ax + by + c = 0$ の傾きは $-\frac{a}{b}$,

線分 PH の傾きは $\frac{b}{a}$ になる。

線分 PH と直線 $ax + by + c = 0$ は直交するので

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \frac{y_1 - Y}{x_1 - X} = -\frac{a}{b}$$

式を変形して $\frac{x_1 - X}{a} = \frac{y_1 - Y}{b} = k$ とおく。

$$x_1 - X = ak, \quad y_1 - Y = bk \quad \text{になり,}$$

$$X = x_1 - ak, \quad Y = y_1 - bk \quad \text{になる。}$$

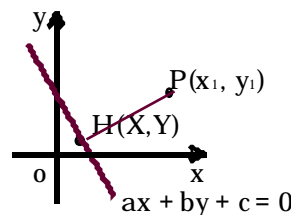
X, Y は直線 $ax + by + c = 0$ 上の点だから $aX + bY + c = 0$ になる。 X, Y を代入して

$$a(x_1 - ak) + b(y_1 - bk) + c = 0$$

$$k = \frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned} PH &= \sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2} = \sqrt{(ak)^2 + (bk)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)k^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2) \left(\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

特に原点から $ax + by + c = 0$ におろした垂線の長さは $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ になる。



三角形の面積

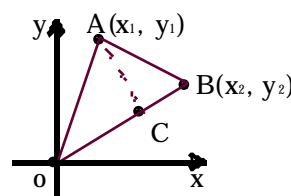
3点 $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を頂点とする $\triangle OAB$ の面積を求める。

直線 OB の方程式は $y = \frac{y_2}{x_2}x$, $x - \frac{x_2}{y_2}y = 0$

点 A から直線 OB におろした垂線の長さは

$$AC = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$\begin{aligned} \triangle OAB \text{ の面積は } & \frac{1}{2} \times OB \times AC = \frac{1}{2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \times \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \\ &= \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1| \end{aligned}$$



問題 A 原点から直線 $y = \frac{1}{2}x + 5$ へおろした垂線の長さを, 次の手順で求めよ。

- (1) 垂線の方程式を求める。 (2) 垂線と直線の交点 H の座標を求める。

直線の傾きが $\frac{1}{2}$ より

$$y = \frac{1}{2}x + 5 \quad \text{と} \quad y = -2x \quad \text{になる。}$$

垂線の傾きは -2 になる。

の連立方程式を解き

$$\text{したがって } y = -2x \quad \text{になる。}$$

$$x = -2, \quad y = 1 \quad \text{になる。}$$

- (3) 距離 OH を求める。

$$\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

- (4) 公式を利用して求める。

$$y = \frac{1}{2}x + 5 \quad \text{より} \quad \frac{|0 - 10 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

問題 B 原点から次の直線への距離を求めよ。

- (1) $y = 2x + 1$ (2) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

問題 C 点 $(3, 2)$ から次の直線への距離を求めよ。

- (1) $y = -\frac{3}{4}x - 2$ (2) $y = 2x + 1$

応用問題 D $(2k + 1)x + (k - 1)y + (-4k + 1) = 0$ は k の値によらず定点を通る。

- (1) この定点の座標を求めよ。

$$\begin{aligned} (x - 3) + k(x - 2y + 1) &= 0 \quad \text{と} \quad k \text{ についての恒等式になる。} \\ x - 3 &= 0 \quad \text{と} \quad x - 2y + 1 = 0 \quad \text{を解いて} \quad x = 3, \quad y = 2 \end{aligned}$$

この k についての恒等式は 2 直線の交点を通る直線の方程式になる。

- (2) この定点と原点を通る直線の方程式を求めよ。
原点を通るので $x = 3, y = 2$ を代入して