

数学 虚数解と判別式 ()年()組()番()

虚数解

a (0), b, c を実数とする 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を平方完成すると ,

$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$ となる。さらに変形すると

$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ この式は , $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき , 実数の解をもつ。

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

数の範囲を複素数までとすると , $b^2 - 4ac < 0$ のときは負の数の平方根が存在するので , 虚数の解をもつ。方程式の実数の解を (), 虚数の解を () という。

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ の解は $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-10}}{2}$

$= -1 \pm \sqrt{-10} = -1 \pm \sqrt{10} i$

$3x^2 - 2x + 1 = 0$ の解は $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{2 \pm \sqrt{-10}}{6}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{-10}}{3}$

問題 A 次の 2 次方程式を解の公式により , 解きなさい。

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

(2) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{8} = -\frac{1}{2}$

判別式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が実数解をもつか , 虚数解をもつかは解の公式のルートの中の $b^2 - 4ac$ の符号によって判別することができる。そこで $D = b^2 - 4ac$ と表し , これを 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の () という。

2 次方程式の解の判別		
$D > 0$	2 個の異なる () をもつ	
$D = 0$	実数の重解をもつ	
$D < 0$	2 個の異なる () をもつ	
したがって ,		
$D \geq 0$	実数の解をもつ	(D は Discriminant の頭文字)

2 次方程式 $ax^2 + 2bx + c = 0$ のときは , $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$ でも判別できる。

問題 B 次の 2 次方程式を解を判別せよ。

(1) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

(2) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

(3) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

問題 C 2 次方程式 $x^2 + 4x + k - 1 = 0$ が重解をもつとき , k の値を求めよ。

応用問題 D 2 次方程式 $x^2 + (k+1)x + k = 0$ が実数解をもつとき , k の値の範囲を求めよ。