

数学 複素数
負の数の平方根

()年()組()番()

一次方程式 $x + 2 = 0$ は、自然数の範囲では解を持たないが、0 や負の整数を考えた()の範囲では、 $(x = \quad)$ の解を持つ。

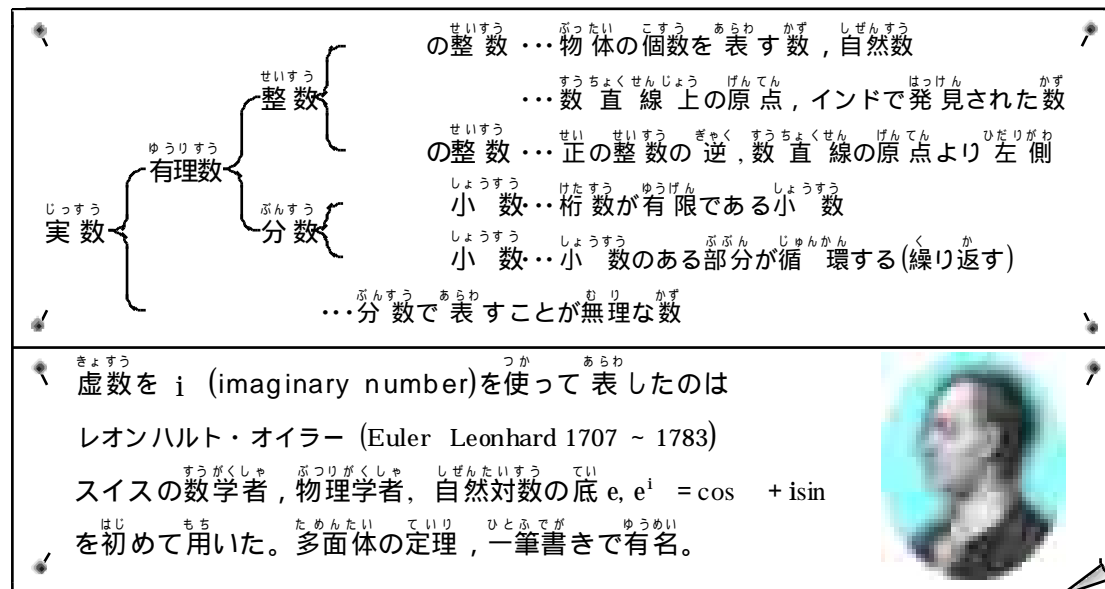
一次方程式 $3x + 2 = 0$ は整数の範囲では解を持たないが、分数を考えた()の範囲では、 $(x = \quad)$ の解を持つ。

二次方程式 $x^2 - 2 = 0$ は有理数の範囲では解を持たないが、無理数を考えた()の範囲では、 $(x = \sqrt{\quad})$ の解を持つ。

二次方程式 $x^2 + 2 = 0$ は実数の範囲では解を持たない。実数の2乗は必ず0以上になり、2乗すると負の数(実数)にはならない。そこで、新たに数を拡張する。2乗すると-1になる数を定義し、これを i と書き、虚数単位という。 $(i^2 = \quad)$

ここで、 $(-\sqrt{2}i)^2 = (-\sqrt{2})^2 i^2 = (\quad)$ 、 $(\sqrt{2}i)^2 = (\sqrt{2})^2 i^2 = (\quad)$ したがって、 $x^2 + 2 = 0$ は $(x = \sqrt{\quad})$ の解を持つ。

一般に、 $a > 0$ のとき、 $-a$ の平方根を $\sqrt{a}i$ 、 $-\sqrt{a}i$ と書く。



問題 A 次の数を i を用いて表せ。

- (1) $\sqrt{-3}$ (2) $\sqrt{-1}$ (3) $\sqrt{-8}$ (4) $-\sqrt{-4}$

複素数

i と2つの実数 a, b を用いた $a + bi$ の形の数を考える。このような数を()といい、 a をこの複素数の(), b を()という。

$b = 0$ のとき、虚数という。また、 $a = 0$ のときの $0 + bi = bi$ を純虚数という。

また、複素数 $a + bi$ が $b = 0$ なら $(a + bi = \quad)$ になるので、実数は複素数の一部であることが分かる。

$a + (-b)i$ は(), $a + 1i$ は()と表す。

a, b, c, d を実数とすると、2つの複素数 $a + bi$ と $c + di$ が等しくなるのは、実部、虚部とも等しいときだけである。

$$a + bi = c + di \quad = \quad \text{かつ} \quad =$$

複素数の相等

問題 B 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

- (1) $x + yi = 0$ (2) $(2x - y) + (x + y)i = 1 + 2i$

- (3) $2x + (y - 1)i = 4 + 3i$

複素数には、大小関係が存在しない！！

複素数 $a + bi, c + di$ に大小関係を定義してみる。

(1) $a > c$ のとき、 $a + bi > c + di$

(2) $a = c$ のとき、 $b > d$ なら、 $a + bi > c + di$

定義にしたがうと、 $i = 0 + i, 0 = 0 + 0i$ より $i > 0$ だが、両辺に i を掛けると、 $i^2 = -1 > i \times 0 = 0$ となり矛盾する。したがって、大小関係は存在しない。

数学 複素数の四則計算 ()年()組()番()

共役な複素数

a, b が実数のとき，複素数 $z = a + bi$ に対して， $a - bi$ を z と () な複素数)と
いう。複素数 z と共役な複素数を \bar{z} と表す。

問題 A 次の複素数と共役な複素数をいえ。
(1) $1 + 2i$ (2) $3 - i$ (3) $1 + \sqrt{3}i$ (4) -7 (5) $4i$

複素数の四則計算

複素数の四則計算では， $a + bi$ を $a + b \times i$ と同じ様に文字として扱い， i^2 を -1 に置き換えて計算する。

除法 $(a + bi) \div (c + di) = \frac{a + bi}{c + di}$ は，分母分子に共役な複素数を掛けて計算する。

$(1 + 2i) + (3 - 4i) = (\quad + \quad) + (\quad - \quad)i =$
 $(1 + 2i) - (3 - 4i) = (\quad - \quad) + (\quad + \quad)i =$
 $(1 + 2i) \times (3 - 4i) = 1 \times 3 + 1 \times (-4)i + 2i \times 3 + 2i \times (-4)i$
 $=$
 $(1 - 2i) \times (1 + 2i) =$
 $(3 - 4i) \div (1 - 2i) = \frac{3 - 4i}{1 - 2i} \times \frac{+ \quad i}{+ \quad i} = \frac{\quad}{\quad}$
 $i^3 = i^2 \times i = \quad, \quad i^{10} = (i^2)^5 = (\quad)^5 = \quad, \quad \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} =$
 $(1 + \sqrt{3}i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2 =$
 $2(3 - 4i) = 2 \times 3 + 2 \times$

問題 B 複素数 $z = a + bi$ に対して， $z + \bar{z}$ ， $z \times \bar{z}$ を計算せよ。

問題 C 次の複素数の計算をせよ。

$(2 + 3i) + (4 + 5i) =$

$(1 + 5i) - (1 + 3i) =$

$(1 + 2i) \times (2 - 3i) =$

$(2 + i) \times (1 + 2i) =$

$(2 + 3i) \times (2 - 3i) =$

$(2 - 3i)^2 =$

$(2 - 3i) \div (2 + 3i) = \frac{2 - 3i}{2 + 3i} \times \frac{- \quad i}{- \quad i} = \frac{\quad}{\quad}$

$i^5 = \quad, \quad (2i)^5 = \quad, \quad \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^3} \times \frac{\quad}{\quad} =$

$2i(3 - i) =$

複素数の四則計算

$(a + bi) + (c + di) = (\quad + \quad) + (\quad + \quad)i$
 $(a + bi) - (c + di) = (\quad - \quad) + (\quad - \quad)i$
 $(a + bi) \times (c + di) = (\quad - \quad) + (\quad + \quad)i$
 $(a + bi) \div (c + di) = \frac{\quad}{\quad + \quad}$

複素数(complex number)の概念を明確にしたのは
カール・フリドリヒ・ガウス(Carl Friedrich Gauss 1777 ~ 1855)
ドイツの数学者，物理学者，複素平面(ガウス平面)，磁束密度の単位
などで有名。近代数学のほとんどの分野に影響を与えた。
「私は言葉話すようになる前から計算していた」