

数学

不等式の証明

()年()組()番()

実数の大小関係

a, b の大 小と , a - b の 値 の 関係 を 調べる。 (具体的な 値 を 入れて 考える)

a と b の大 小	a < b	a = b	a > b
a - b の 値	a - b 0	a - b = 0	a - b 0

a, b の大 小は a - b の符号を調べれば分かる。

a > 1 , b > 1 のとき , a b + 1 > a + b を証明する。

(左辺) - (右辺) = (+) - (+) = (- 1)(- 1)

a > 1 , a > 1 だから , - 1 > 0, - 1 > 0

よって , (- 1)(- 1) > 0 したがって (+) - (+) > 0

となり , a b + 1 > a + b

問題 A x > y ならば , 3 x + y > x + 3 y を証明せよ。

(左辺) - (右辺) = (+) - (+) =

x > y だから , (-) >

よって , 3 x + y > x + 3 y

実数の平方

a が正 , 0 , 負のどんな実数であっても , (a² 0) になる。 (等号は a = 0 のみ)

また , a² 0 , b² 0 だから (a² + b² 0) になる。 (等号は a = 0, b = 0 のみ)

例 x² + y² 2 x y を証明する。

(左辺) - (右辺) = + - = (-)² 0

よって , x² + y² 2 x y

例 x² + 2 x + 2 > 0 を証明する。

x² + 2 x + 2 = x² + 2 x + 1 + 1 = (x +)² + > 0

よって , x² + 2 x + 2 > 0

問題 B (a + b)² 4 a b を証明せよ。

相加平均と相乗平均

a > 0 , b > 0 のとき , a + b 2√a b を証明する。

a + b - 2√a b = a - 2√a b + b = (√)² - 2√√ + (√)²
= (√ - √)² 0 (等号は √a = √b , すなわち , a = b のとき)

両 辺 を 2 で 割 る と , $\frac{a + b}{2}$ √a b になる。

$\frac{a + b}{2}$ を (平均) , √a b を (平均) という。 (相加平均) (相 乗 平均)

問題 C a > 0 のとき , a + $\frac{1}{a}$ 2 を証明せよ。また , 等号はどんなときか？

a > 0, $\frac{1}{a}$ > 0 より , $\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$ √ × = (相 加 相 乗 平 均 より)

したがって , (a + $\frac{1}{a}$ 等号は a = $\frac{1}{a}$ すなわち , a = のとき)

問題 D a > 0 , b > 0 のとき , 次の式の最小値を求めよ。

(1) a + $\frac{4}{a}$ (2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ (3) 2a + $\frac{3}{a}$

問題 E 次の 2 個の数の相加平均と相 乗 平均を求めよ。

(1) 2, 2 (2) 1, 4 (3) 1, 3

相加平均

相乗平均

平方の大 小

a > 0 , b > 0 のとき , a + b > になる。 a² - b² = (+)(-) より ,

a² - b² の符号は (-) と同じになる。よって , 次のことが分かる。

a > 0 , b > 0 のとき , a > b ならば (a² b²)

a 0 , b 0 のとき , a b ならば (a² b²)

問題 F a > 0 , b > 0 のとき √a + √b > √a + b を証明せよ。

√a > , √b > , √a + b > より 2 乗 して 比 較 する。

(左辺)² - (右辺)² = (√ + √)² - (√)² =

よって √a + √b > √a + b

