

不等式の証明方法

左辺 - 右辺を計算する (不等式の基本的性質)

実数 a に対して $a^2 \geq 0$ (絶対不等式)

$A > 0, B > 0$ なら, $A \cdot B \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$ (平方による比較)

$(a + b) \div 2 \geq \sqrt{ab}$ (相加・相乗平均)

絶対値の性質

$|a| = \begin{cases} a & \cdots a \geq 0 \text{ のとき} \\ -a & \cdots a < 0 \text{ のとき} \end{cases}$

$|a| \geq 0$, $|ab| = |a| \cdot |b|$

$|a|^2 = a^2$

1. 次の不等式を証明せよ。

(1) $a > c$ かつ $b > d$ のとき, $ab + cd > ad + bc$

(左辺) - (右辺) = $(ab + cd) - (ad + bc)$

$= ab + cd - ad - bc$

$= a(b - d) - c(b - d)$

$= (b - d)(a - c)$

$a - c > 0$ かつ $b - d > 0$ であるから

(左辺) - (右辺) = $(b - d)(a - c) > 0$

よって, $ab + cd > ad + bc$

(2) $(a + 1)^2 \geq 4a$

(左辺) - (右辺) = $(a + 1)^2 - 4a$

よって, $(a + 1)^2 \geq 4a$

(3) $x^2 + 2y^2 \geq 2xy$

(左辺) - (右辺) = $x^2 + 2y^2 - 2xy$

$= (x - y)^2 + y^2$

よって,

等号は

(4) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 \geq 0$

(左辺) = $(x - 1)^2 + (y + 2)^2$

(5) $x^2 + y^2 \geq xy$

(左辺) - (右辺) = $x^2 + y^2 - xy$

$= (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

(4) $a, b \geq 0$ のとき, $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a+b}$

両辺とも負ではないから, 2乗した不等式で示す。

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a+b})^2$

(左辺) - (右辺) = $(a - 2\sqrt{ab} + b) - (a + b)$

$= -2\sqrt{ab}$

よって, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a+b})^2$

ゆえに, $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a+b}$

2. 次の絶対値を使った不等式を証明せよ。

(1) $|a| + |b| \geq |a + b|$

両辺とも負ではないから, 2乗した不等式で示す。

$(|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2$

(左辺) - (右辺) = $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

となり, $|a| + |b| \geq |a + b|$ が成り立つ。

(2) $|a| - |b| \leq |a - b|$

(1)より $|a| \leq |a - b| + |b|$

ここで, a の代わりに $a - b$ を代入する。

$|a - b| \leq |a - b - b| + |b|$

3. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ のとき, 次の不等式を証明せよ。

(1) $a + \frac{4}{a} \geq 4$

(2) $a + \frac{9}{a} \geq 6$

(3) $(a + b)(c + d) \geq 4\sqrt{abcd}$

(左辺) = $(a + b)(c + d) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{d}$

$= \sqrt{(a + b)(c + d)}$

よって, $(a + b)(c + d) \geq 4\sqrt{abcd}$

(4) $(a + b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$

(左辺) - (右辺) = $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2$

よって