数学Ⅱ　不等式の証明　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

例題① $x > y$ のとき，$5x + 2y > 2x + 5y$

$(左辺)-(右辺)=(5x+2y)-(2x+5y)$

$=3x-3y=3(x-y)$

$x > y$ であるから，$3(x-y)>0$

よって，$(5x+2y)-(2x+5y)>0$

したがって　$5x+2y>2x+5y$ が成り立つ。

Q.E.D

問題① $x > y$ のとき，$4x + y > x + 4y$

例題② $x^2 + 2y^2 \geqq 2xy$

$(左辺)-(右辺)=(x^2+2y^2)-2xy$

$=x^2-2xy+y^2+y^2$

$=(x-y)^2+y^2 \geqq 0$

したがって，(左辺)−(右辺) $\geqq 0$ であるから

$x^2+y^2 \geqq 2x$ が成り立つ。

Q.E.D

等号が成り立つのは，$x-y=0$ かつ $y=0$ より

$x=y=0$

問題② $x^2 + 5y^2 \geqq 4xy$

2. 次の2つの数の相加平均と相乗平均を求めなさい。 Find the arithmetic mean and geometric mean of the following two numbers.

例題	問題
① 4 と 16 相加平均 arithmetic mean $\frac{4+16}{2}=10$ 相乗平均 geometric mean $\sqrt{4\times16}=\sqrt{64}=8$	① 4 と 36 相加平均 相乗平均
② 5 と 5 相加平均 arithmetic mean $\frac{5+5}{2}=5$ 相乗平均 geometric mean $\sqrt{5\times5}=\sqrt{25}=5$	② 7 と 7 相加平均 相乗平均

3. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

例題 $x > 0$ のとき，$x + \frac{4}{x} \geqq 4$

$x>0$ より　$\frac{4}{x}>0$

相加平均と相乗平均の関係より

$\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right) \geqq \sqrt{x\times\frac{4}{x}}=\sqrt{4}=2$

よって

$x+\frac{4}{x} \geqq 4$

Q.E.D

等号が成り立つのは　$x=\frac{4}{x}$，$x=2$　のとき

問題 $a > 0$，$b > 0$ のとき，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$

数学Ⅱ　不等式の証明　2　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の不等式を証明せよ。

例題① $a>1$ のとき，$a+3>\sqrt{6a+10}$

$a+3>0$，$\sqrt{6a+10}>0$ であるから，2乗する。

$(a+3)^2-(\sqrt{6a+10})^2$

$=(a^2+6a+9)-(6a+10)=a^2-1$

$a>1$ であるから，$a^2-1>0$

したがって　$(a+3)^2>(\sqrt{6a+10})^2$

よって，$a>1$ のとき，$a+3>\sqrt{6a+10}$　Q.E.D

問題① $a>1$ のとき，$a+3>\sqrt{4a+5}$

例題② $a\geqq b\geqq 0$ のとき，$\sqrt{a-b}\geqq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$a\geqq b\geqq 0$ のとき $\sqrt{a-b}\geqq 0$，$\sqrt{a}-\sqrt{b}\geqq 0$

であるから，2乗する。

$(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)=2\sqrt{ab}\geqq 0$

したがって　$(\sqrt{a-b})^2\geqq(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

よって，$a\geqq b\geqq 0$ のとき，$\sqrt{a-b}\geqq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Q.E.D

問題② $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき，$\sqrt{2a+2b}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

2．次の絶対値の記号のついた不等式を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか・

例題 $|a|+|b|\geqq|a+b|$

$|a|+|b|\geqq 0$，$|a+b|\geqq 0$ であるから

2乗する。

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$

$=(|a|^2+2|a||b|+|b|^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=(a^2+2|a||b|+b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=2|a||b|-2ab=2(|a||b|-ab)\geqq 0$

等号が成り立つのは　$|a||b|-ab=0$

すなわち $ab\geqq 0$ のときである。　Q.E.D

問題① $|a|+|b|\geqq|a-b|$

問題② $|a-b|\geqq|a|-|b|$

数学Ⅱ　不等式の証明　3　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の不等式を証明せよ。

例題　$x>2$，$y>2$ のとき，$xy+4>2x+2y$

①

$(左辺)-(右辺)=(xy+4)-(2x+2y)$

$=xy-2x-2y+4$

$=(x-2)(y-2)$

$x>2,\ y>2$ より，$x-2>0$，$y-2>0$

よって，$(x-2)(y-2)>0$

したがって　$xy+4>2x+2y$　が成り立つ。

Q.E.D

問題　$x>2$，$y>4$ のとき，$xy+8>4x+2y$

①

例題　$(x+2y)^2\geqq 2xy$

②

$(左辺)-(右辺)=(x+2y)^2-2xy$

$=x^2+4xy+2y^2-2xy$

$=(x+y)^2+y^2\geqq 0$

したがって，$(左辺)-(右辺)\geqq 0$ であるから

$(x+2y)^2\geqq 2xy$ が成り立つ。　Q.E.D

等号が成り立つのは，$x=y=0$

問題　$(x+y)^2\geqq 2xy$

②

2．次の2つの数の相加平均と相乗平均を求めなさい。

例題	問題
① 2と8 相加平均 $\dfrac{2+8}{2}=5$ 相乗平均 $\sqrt{2\times 8}=\sqrt{16}=4$	① 3と27 相加平均 相乗平均
② 2と2 相加平均 $\dfrac{2+2}{2}=2$ 相乗平均 $\sqrt{2\times 2}=\sqrt{4}=2$	② 3と3 相加平均 相乗平均

3．次の不等式を証明せよ。

例題　$a>0,\ b>0$ のとき，$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 4$

$a>0,\ b>0$ より，$ab>0$，$\dfrac{1}{ab}>0$

相加平均と相乗平均の関係より

$$ab+\frac{1}{ab}\geqq 2\sqrt{ab\times\frac{1}{ab}}=2$$

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=ab+\frac{1}{ab}+2\geqq 4$$

よって　$a>0,\ b>0$ のとき，

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 4$　Q.E.D

等号が成り立つのは $ab=1$ のとき

問題　$a>0,\ b>0$ のとき，$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$