

1. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

2. 次の2つの数の相加平均と相乗平均を求めなさい。 Find the arithmetic mean and geometric mean of the following two numbers.

例題 $x > y$ のとき、 $5x + 2y > 2x + 5y$

① $(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = (5x + 2y) - (2x + 5y)$
 $= 3x - 3y = 3(x - y)$

$x > y$ であるから、 $3(x - y) > 0$

よって、 $(5x + 2y) - (2x + 5y) > 0$

したがって $5x + 2y > 2x + 5y$ が成り立つ。

Q.E.D

問題 $x > y$ のとき、 $4x + y > x + 4y$

①

例題 $x^2 + 2y^2 \geq 2xy$

② $(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = (x^2 + 2y^2) - 2xy$
 $= x^2 - 2xy + y^2 + y^2$
 $= (x - y)^2 + y^2 \geq 0$

したがって、 $(\text{左辺}) - (\text{右辺}) \geq 0$ であるから

$x^2 + y^2 \geq 2x$ が成り立つ。

Q.E.D

等号が成り立つのは、 $x - y = 0$ かつ $y = 0$ より

$x = y = 0$

問題 $x^2 + 5y^2 \geq 4xy$

②

例題	問題
<p>① 4 と 16</p> <p>相加平均 arithmetic mean</p> $\frac{4+16}{2} = 10$ <p>相乗平均 geometric mean</p> $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$	<p>① 4 と 36</p> <p>相加平均</p> <p>相乗平均</p>
<p>② 5 と 5</p> <p>相加平均 arithmetic mean</p> $\frac{5+5}{2} = 5$ <p>相乗平均 geometric mean</p> $\sqrt{5 \times 5} = \sqrt{25} = 5$	<p>② 7 と 7</p> <p>相加平均</p> <p>相乗平均</p>

3. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

例題 $x > 0$ のとき、 $x + \frac{4}{x} \geq 4$

$x > 0$ より $\frac{4}{x} > 0$

相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right) \geq \sqrt{x \times \frac{4}{x}} = \sqrt{4} = 2$$

よって

$$x + \frac{4}{x} \geq 4$$

Q.E.D

等号が成り立つのは $x = \frac{4}{x}$ 、 $x = 2$ のとき

問題 $a > 0$ 、 $b > 0$ のとき、 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

1. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

2. 次の絶対値の記号のついた不等式を証明せよ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか・
Prove the following inequality with the sign of absolute value.
Also, when does the equality sign hold?

例題 $a > 1$ のとき、 $a + 3 > \sqrt{6a + 10}$

① $a + 3 > 0$, $\sqrt{6a + 10} > 0$ であるから、2乗する。
 $(a + 3)^2 - (\sqrt{6a + 10})^2$
 $= (a^2 + 6a + 9) - (6a + 10) = a^2 - 1$
 $a > 1$ であるから、 $a^2 - 1 > 0$
したがって $(a + 3)^2 > (\sqrt{6a + 10})^2$
よって、 $a > 1$ のとき、 $a + 3 > \sqrt{6a + 10}$ Q.E.D

問題 $a > 1$ のとき、 $a + 3 > \sqrt{4a + 5}$

①

例題 $a \geq b \geq 0$ のとき、 $\sqrt{a - b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

② $a \geq b \geq 0$ のとき $\sqrt{a - b} \geq 0$, $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$
であるから、2乗する。
 $(\sqrt{a - b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$
 $= (a - b) - (a - 2\sqrt{ab} + b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$
したがって $(\sqrt{a - b})^2 \geq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$
よって、 $a \geq b \geq 0$ のとき、 $\sqrt{a - b} \geq \sqrt{a} - \sqrt{b}$ Q.E.D

問題 $a \geq 0, b \geq 0$ のとき、 $\sqrt{2a + 2b} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

②

例題 $|a| + |b| \geq |a + b|$

$|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ であるから
2乗する。
 $(|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$
 $= (|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2) - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= (a^2 + 2|a||b| + b^2) - (a^2 + 2ab + b^2)$
 $= 2|a||b| - 2ab = 2(|a||b| - ab) \geq 0$
等号が成り立つのは $|a||b| - ab = 0$
すなわち $ab \geq 0$ のときである。 Q.E.D

問題 $|a| + |b| \geq |a - b|$

①

問題 $|a - b| \geq |a| - |b|$

②

1. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

例題

$x > 2, y > 2$ のとき, $xy + 4 > 2x + 2y$

①

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (xy + 4) - (2x + 2y) \\ &= xy - 2x - 2y + 4 \\ &= (x - 2)(y - 2) \end{aligned}$$

$x > 2, y > 2$ より, $x - 2 > 0, y - 2 > 0$

よって, $(x - 2)(y - 2) > 0$

したがって $xy + 4 > 2x + 2y$ が成り立つ。

Q.E.D

問題

$x > 2, y > 4$ のとき, $xy + 8 > 4x + 2y$

①

例題

$(x + 2y)^2 \geq 2xy$

②

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (x + 2y)^2 - 2xy \\ &= x^2 + 4xy + 2y^2 - 2xy \\ &= (x + y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

したがって, $(\text{左辺}) - (\text{右辺}) \geq 0$ であるから

$(x + 2y)^2 \geq 2xy$ が成り立つ。

Q.E.D

等号が成り立つのは, $x = y = 0$

問題

$(x + y)^2 \geq 2xy$

②

2. 次の2つの数の相加平均と相乗平均を求めなさい。 Find the arithmetic mean and geometric mean of the following two numbers.

例題	問題
① 2 と 8 相加平均 arithmetic mean $\frac{2+8}{2} = 5$ 相乗平均 geometric mean $\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$	① 3 と 27 相加平均 相乗平均
② 2 と 2 相加平均 arithmetic mean $\frac{2+2}{2} = 2$ 相乗平均 geometric mean $\sqrt{2 \times 2} = \sqrt{4} = 2$	② 3 と 3 相加平均 相乗平均

3. 次の不等式を証明せよ。 Prove the following inequality.

例題

$a > 0, b > 0$ のとき, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4$

$a > 0, b > 0$ より, $ab > 0, \frac{1}{ab} > 0$

相加平均と相乗平均の関係より

$$ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{ab \times \frac{1}{ab}} = 2$$

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 \geq 4$$

よって $a > 0, b > 0$ のとき,

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4$$

Q.E.D

等号が成り立つのは $ab = 1$ のとき

問題

$a > 0, b > 0$ のとき, $\left(a + b\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$