

1. 次の等式を証明せよ。 Prove the following equation.

例題

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3$$
$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= a^3 + b^3 = \text{(右辺)} \end{aligned}$$

したがって、(左辺) = (右辺) となるから

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3 \quad \text{Q.E.D}$$

問題

$$(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

2. 次の条件付き等式を証明せよ。 Prove the following conditional equation.

例題

$$a + b = 1 \text{ のとき, } a^2 + b = a + b^2$$
$$\begin{aligned} a + b &= 1 \text{ より, } b = 1 - a \\ \text{(左辺)} &= a^2 + b = a^2 + (1 - a) \\ &= a^2 - a + 1 \\ \text{(右辺)} &= a + b^2 = a + (1 - a)^2 \\ &= a + 1 - 2a + a^2 \\ &= a^2 - a + 1 \end{aligned}$$

したがって、(左辺) = (右辺) となるから

$$a + b = 1 \text{ のとき, } a^2 + b = a + b^2 \quad \text{Q.E.D}$$

問題

$$a + b = 2 \text{ のとき, } a^2 + 2b = b^2 + 2a$$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。 Prove the following equation when $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

例題

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと}$$
$$\frac{a}{b} = k \text{ より } a = bk, \quad \frac{c}{d} = k \text{ より } c = dk$$

よって

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \frac{a + b}{b} = \frac{bk + b}{b} = k + 1 \\ \text{(右辺)} &= \frac{c + d}{d} = \frac{dk + d}{d} = k + 1 \end{aligned}$$

したがって、(左辺) = (右辺) となるから

$$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d} \quad \text{Q.E.D}$$

問題

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d}$$

①

$$a(c - d) = c(a - b)$$

②

1. 次の等式を証明せよ。 Prove the following equation.

例題

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$
$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \\ \text{(右辺)} &= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = \text{(左辺)} \end{aligned}$$

したがって、(左辺) = (右辺) となるから

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \quad \text{Q.E.D.}$$

問題

$$(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) = (ax + by)^2 - (ay + bx)^2$$

2. 次の条件付き等式を証明せよ。 Prove the following conditional equation.

例題

$a + b = 1$ のとき、 $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \text{ より, } b = 1 - a \\ \text{(左辺)} &= a^2 + (1 - a)^2 = 2a^2 - 2a + 1 \\ \text{(右辺)} &= 1 - 2a(1 - a) = 2a^2 - 2a + 1 \end{aligned}$$

したがって、(左辺) = (右辺) となるから

$$a + b = 1 \text{ のとき, } a^2 + b^2 = 1 - 2ab \quad \text{Q.E.D.}$$

問題

$$a + b + c = 0 \text{ のとき, } a^2 + b^2 = c^2 - 2ab$$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。 Prove the following equation when $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

例題

$$\frac{a}{b} = \frac{a - c}{b - d}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと}$$
$$\frac{a}{b} = k \text{ より } a = bk, \quad \frac{c}{d} = k \text{ より } c = dk$$

よって

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \frac{a}{b} = k \\ \text{(右辺)} &= \frac{a - c}{b - d} = \frac{bk - dk}{b - d} = k \end{aligned}$$

したがって、(左辺) = (右辺) となるから

$$\frac{a}{b} = \frac{a - c}{b - d} \quad \text{Q.E.D.}$$

問題

①
$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2}$$

問題

②
$$b(c + d) = d(a + b)$$

1. 次の等式を証明せよ。 Prove the following equation.

例題

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$
$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 \\ &= a^3 - b^3 = \text{(左辺)} \end{aligned}$$

したがって、 $\text{(左辺)} = \text{(右辺)}$ となるから

$$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) \quad \text{Q.E.D}$$

問題①

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

問題②

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

2. 次の条件付き等式を証明せよ。 Prove the following conditional equation.

例題

$xy = 1$ のとき、 $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) = 4$

$xy = 1$ より、 $x \neq 0, y \neq 0$ であるので

$$x = \frac{1}{y}, \quad y = \frac{1}{x}$$
$$\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right)$$
$$= (x + x)(y + y) = 4xy = 4 \quad \text{Q.E.D}$$

問題

$xyz = 2$ のとき

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = \frac{x + y + z}{2}$$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき、次の等式を証明せよ。 Prove the following equation when $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

例題

$$\frac{a}{a + b} = \frac{c}{c + d}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと}$$
$$\frac{a}{b} = k \text{ より } a = bk, \quad \frac{c}{d} = k \text{ より } c = dk$$

よって

$$\text{(左辺)} = \frac{a}{a + b} = \frac{bk}{bk + b} = \frac{k}{k + 1}$$
$$\text{(右辺)} = \frac{c}{c + d} = \frac{dk}{dk + d} = \frac{k}{k + 1}$$

したがって、 $\text{(左辺)} = \text{(右辺)}$ となるから

$$\frac{a}{a + b} = \frac{c}{c + d} \quad \text{Q.E.D}$$

問題①

$$\frac{a + 3c}{b + 3d} = \frac{a - 3c}{b - 3d}$$

問題②

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{ab}{cd}$$

