

数学 ^{にこうていり}二項定理 ()年()組()番()

$(a + b)^n$ ^{てんかい}の展開

$(a + b)^0, (a + b)^1, (a + b)^2, (a + b)^3$ ^{てんかい おこな}の展開を行 う。

(0) $(a + b)^0 = 1$ ^{さだ}と定める。

(1) $(a + b)^1 = a + b$

(2) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

$$= a \times a + a \times b + b \times a + a \times b$$

$$= (a^2 + ab + b^2)$$

(3) $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$

$$= (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= a \times a^2 + a \times (ab) + a \times b^2$$

$$+ b \times a^2 + b \times (ab) + b \times b^2$$

$$= (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

問題 A $(a + b)^4$ ^{てんかい}の展開をせよ。

問題 B $(a + b)^5$ ^{てんかい}の展開をせよ。



ブレーズ・パスカル
1623/6/19 ~ 1662/8/19
フランスの数学者

パスカルの三角形 ^{さんかつけい}

$(a + b)^0, (a + b)^1, (a + b)^2, (a + b)^3$ ^{てんかいしき しら}の展開式を調べて, $(a + b)^n$ ^{てんかいしき みちび}の展開式を導く。

$$\left. \begin{array}{l} (a + b)^0 = 1 \\ (a + b)^1 = a + b \\ (a + b)^2 = a^2 + ab + b^2 \\ (a + b)^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{係数だけ} \\ \text{抜き出す} \end{array}$$

この様にして得られる三角形状の数の配列を(^{さんかつけい}の三角形)という。

問題 C パスカルの三角形の計算規則を見つけなさい。

両端の数は()である。両端以外の数は, 左上と右上の数の()である。

問題 D $(a + b)^6$ ^{てんかいしき}の展開式をパスカルの三角形を利用して書きなさい。

二項定理 ^{にこうていり}

$(a + b)^n$ ^{てんかいしき しすう}の展開式と指数 n との関係調べ。

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$ ^{うへん てんかい}の右辺を展開することをかんがえよう。

a^3 ^{こう}の項は $(a + b)(a + b)(a + b) = a \times a \times a$ ^{ひととお}の一通りしかない。

a^2b ^{こう}の項は $(a + b)(a + b)(a + b) =$
 $(a + b)(a + b)(a + b) =$
 $(a + b)(a + b)(a + b) =$
^{さんとお}の三通りもある。

3個の項から, aを2個選ぶ組み合わせ ${}_3C_2 = 3$ になる。

同様に考えると, ab^2 ^{こう}の項は三通り, b^3 ^{こう}の項は一通りである。

$(a + b)^3$ ^{てんかいしき}の展開式における a^3, a^2b, ab^2, b^3 ^{けいすう}の係数は(1, , , 1)になる。

$(a + b)^n$ ^{てんかい}を展開すると, 次の式になる。これを(^{ていり}定理)という。

$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + {}_nC_3 a^{n-3}b^3 + \cdots + {}_nC_n b^n$
右辺を ^{うへん}を使い, $\sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r}b^r$ ^{つが}と表せる。

二項定理の一般項は($C a^{n-r} b^r$)であり, 係数 ${}_nC_r$ ^{けいすう}を二項係数という。

数学 二項定理 ()年()組()番()

パスカルの三角形

$(a + b)^0, (a + b)^1, (a + b)^2$ などの展開式を調べて, $(a + b)^n$ の展開式を導く。

$$\left. \begin{aligned} (a + b)^0 &= 1 \\ (a + b)^1 &= a + b \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{係数だけ} \\ \text{抜き出す。} \end{array}$$

このように得られる三角形状の数の配列を()の三角形という。

問題 A パスカルの三角形の計算規則を見つけなさい。

両端の数は()である。両端以外の数は, 左上と右上の数の()である。

問題 B $(a + b)^4, (a + b)^5$ の展開式をパスカルの三角形を利用して書きなさい。

$$(a + b)^4 =$$

$$(a + b)^5 =$$

二項定理

$(a + b)^n$ の展開式と指数 n との関係を調べる。

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$ の右辺を展開することを考えよう。

a^3 の項は $(a + b)(a + b)(a + b) = a \times a \times a$ の一通りしかない。

a^2b の項は $(a + b)(a + b)(a + b) =$ の三通りもある。

$(a + b)(a + b)(a + b) =$

3 個の項から, a を 2 個選ぶ組み合わせ ${}_3C_2 = 3$ になる。

同様に考えると, ab^2 の項は三通り, b^3 の項は一通りである。

したがって, $(a + b)^3$ の展開式における a^3, a^2b, ab^2, b^3 の係数は 1, 3, 3, 1 になる。

このことより, $(a + b)^n$ を展開すると, 次の式になる。これを()定理という。

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + {}_nC_3 a^{n-3}b^3 + \cdots + {}_nC_n b^n$$

右辺を $\sum_{r=0}^n {}_nC_r a^{n-r}b^r$ と表せる。

二項定理の一般項は($C a^{n-r} b^r$)であり, 係数 ${}_nC_r$ を二項係数という。

組み合わせ

異なる n 個から, r 個取り出し 1 組にしたものを()といい, ${}_nC_r$ で表す。

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

${}_nC_r = \frac{n \text{ から } r \text{ 個の整数の積}}{r \text{ から } 1 \text{ までの整数の積}}$

$${}_4C_0 = 1 \quad {}_4C_1 = \frac{4}{1} = 4 \quad {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \quad {}_4C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4 \quad {}_4C_4 = 1$$

問題 C $(2a + b)^4$ を二項定理を用いて展開せよ。

$$(2a + b)^4 = {}_4C_0 (2a)^4 + {}_4C_1 (2a)^3b + {}_4C_2 (2a)^2b^2 + {}_4C_3 (2a)b^3 + {}_4C_4 b^4$$

発展問題 D $(a^2 - 2b)^4$ を展開せよ。

発展問題 E $(2x - y)^5$ の展開式における x^2y^3 の係数を求めよ。

発展問題 F $(x + y + z)^5$ の展開式における x^2y^2z の係数を求めよ。

$(x + y)$ をひとかたまりとみて展開した一般項は ${}_5C_r (x + y)^{5-r} z^r$ になる。

よって, x^2y^2z になるのは, ($r =$) の場合だけである。

また, $(x + y)$ () を展開したときの x^2y^2 の係数は(C)である。

したがって, x^2y^2z の係数は(${}_5C \times C =$)になる。

発展問題 G ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ を証明せよ。

$$(1 + x)^n =$$

において, $x = 1$ とすると