

1. 剰余定理を用いて、余りを求めなさい。
Find the remainder using the remainder theorem.

$P(x)$ を $x -$ で割ったときの余りが $R(x)$

例題 $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ を次の式で割ったときの余りを求めなさい。
Find the remainder when $P(x)$ is divided by the following formula.

- (1) $x - 1$
 $P(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$
- (2) $x + 1$
 $P(-1) = (-1)^3 - 6 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) - 6 = -1 - 6 - 11 - 6 = -24$

問題 $P(x) = x^3 - 3x - 2$ を次の式で割ったときの余りを求めなさい。

- (1) $x - 1$
- (2) $x + 1$
- (3) $x - 2$

2. 因数定理を用いて、次の整式の因数が調べよ。
Use the factor theorem to find out whether it is a factor of the following integral expression.

$R(x) = 0$ $x -$ が因数, $P(x) = (x -)Q(x)$

例題 次の式が $P(x) = x^3 - 3x - 2$ の因数か調べよ。

(1) $x - 1$
 $P(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 2 = -4$
 $x - 1$ は $P(x)$ の因数ではない。

(2) $x + 1$
 $P(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 2 = 0$
 $x + 1$ は $P(x)$ の因数である。

問題 次の式が $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ の因数か調べよ。

- (1) $x - 1$
- (2) $x + 1$
- (3) $x - 2$

3. 次の方程式を解きなさい。 Solve the following equation.

例題 $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
 $x(x^2 - 2x - 3) = 0$
 $x(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = 0, -1, 3$

問題 $x^3 - x^2 - 2x = 0$

例題 $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
 $x^2 = X$ とおくと $X^2 - 3X - 4 = 0$
 $(X + 1)(X - 4) = 0$
 $(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$
 $(x^2 + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$
 $x = \pm i, -2, 2$

問題 $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

例題 $x^3 - 3x - 2 = 0$
 $P(x) = x^3 - 3x - 2$ とすると $P(-1) = 0$
 $P(x)$ は $x + 1$ の因数をもつ。
 $P(x) = (x + 1)(x^2 - x - 2)$
 $= (x + 1)(x + 1)(x - 2) = 0$
 $x = -1$ (重解), 2

問題 $x^3 - 7x + 6 = 0$

1. 剰余定理を用いて，余りを求めなさい。

$A(x)$ を $x - \quad$ で割ったときの余りが $A(\quad)$

例題 $A(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ を次の式で割ったときの余りを求めなさい。

- (1) $x - 1$
 $A(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + 3 \times 1 - 1 = 0$
- (2) $x + 1$
 $A(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) - 1$
 $= -1 - 3 - 3 - 1 = -8$

問題 $A(x) = x^3 - 6x - 2$ を次の式で割ったときの余りを求めなさい。

- (1) $x - 1$
- (2) $x + 1$
- (3) $x - 2$

2. 因数定理を用いて，次の整式の因数が調べよ。

$A(\quad) = 0$ $x - \quad$ が因数， $A(x) = (x - \quad)Q(x)$

例題 次の式が $A(x) = x^3 + 6x - 7$ の因数が調べよ。

- (1) $x - 1$
 $A(1) = 1^3 + 6 \times 1 - 7 = 0$
 $x - 1$ は $A(x)$ の因数である。

- (2) $x + 1$
 $A(-1) = (-1)^3 + 6 \times (-1) - 7 = -14$
 $x - 1$ は $A(x)$ の因数ではない。

問題 次の式が $A(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ の因数が調べよ。

- (1) $x - 1$
- (2) $x + 1$
- (3) $x - 2$

3. 次の方程式を解きなさい。

例題 $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$
 $x(x^2 - 3x - 4) = 0$
 $x(x + 1)(x - 4) = 0$
 $x = 0, -1, 4$

問題 $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$

例題 $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$
 $x^2 = X$ とおくと $X^2 + 2X - 3 = 0$
 $(X + 3)(X - 1) = 0$
 $(x^2 + 3)(x^2 - 1) = 0$
 $(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1) = 0$
 $x = \pm \sqrt{3}, -1, 1$

問題 $x^4 + x^2 - 2 = 0$

例題 $x^3 - 3x + 2 = 0$
 $A(x) = x^3 - 3x + 2$ とすると $A(1) = 0$
 $A(x)$ は $x - 1$ の因数をもつ。
 $A(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$
 $= (x - 1)(x - 1)(x + 2) = 0$
 $x = -1$ (重解), -2

問題 $x^3 - 13x + 12 = 0$

1. 剰余定理を用いて、余りを求めなさい。

$$A(x) \text{ を } x - \text{ で割ったときの余りが } A()$$

例題

$$A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \text{ を次の式で割ったときの余りを求めなさい。}$$

(1) $x - 1$
$$A(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 8$$

(2) $x + 1$
$$A(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 1 = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

問題

$$A(x) = x^3 - 7x - 6 \text{ を次の式で割ったときの余りを求めなさい。}$$

(1) $x - 1$

(2) $x + 1$

(3) $x + 2$

2. 因数定理を用いて、次の整式の因数が調べよ。

$$A() = 0 \quad x - \text{ が因数, } A(x) = (x -)Q(x)$$

例題

$$\text{次の式が } A(x) = x^4 + x^2 - 2 \text{ の因数が調べよ。}$$

(1) $x - 1$
$$A(1) = 1^4 + 1^2 - 2 = 0$$
$$x - 1 \text{ は } A(x) \text{ の因数である。}$$

(2) $x - 2$
$$A(2) = 2^4 + 2^2 - 2 = 18$$
$$x - 1 \text{ は } A(x) \text{ の因数ではない。}$$

問題

$$\text{次の式が } A(x) = x^4 + 2x^2 - 3 \text{ の因数が調べよ。}$$

(1) $x - 1$

(2) $x + 1$

(3) $x - 3$

3. 次の方程式を解きなさい。

例題

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x(x + 1)(x - 2) = 0$$
$$x = 0, -1, 2$$

問題

$$x^3 + 5x^2 - 6x = 0$$

例題

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$
$$x^2 = X \text{ とおくと } X^2 - X - 2 = 0$$
$$(X - 2)(X + 1) = 0$$
$$(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0$$
$$(x^2 - 2)(x + i)(x - i) = 0$$
$$x = \pm \sqrt{2}, -i, i$$

問題

$$x^4 + 4x^2 - 5 = 0$$

例題

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$
$$A(x) = x^3 - 12x + 16 \text{ とすると } A(2) = 0$$
$$A(x) \text{ は } x - 2 \text{ の因数をもつ。}$$
$$A(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 8)$$
$$= (x - 2)(x - 2)(x + 4) = 0$$
$$x = 2 \text{ (重解)}, -4$$

問題

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

1. 次の整式を $x - 1$ で割ったときの余りが 0 のとき，定数 a の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + a$

剰余定理により

$P(1) = 1^3 + 1^2 + 2 \times 1 + a = a + 4 = 0$

したがって， $a = -4$

問題 $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a$

2. 整式 $P(x)$ を $(x - 1)(x - 2)$ で割ったとき，定数 a, b の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ ，余り $2x + 1$

剰余定理により

$P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 + a \times 1 + b = 2 \times 1 + 1$

$a + b = 5 \quad \cdots$

$P(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + a \times 2 + b = 2 \times 2 + 1$

$2a + b = 9 \quad \cdots$

， を解いて $a = 4, b = 1$

問題 $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ ，余り $3x + 2$

3. 次の整式が $(x - 1)^2$ で割り切れるとき，定数 a, b の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$

$(x - 1)^2$ で割り切れるから， $x - 1$ で割り切れる。

剰余定理により

$P(1) = 1^3 - 1^2 + a \times 1 + b = 0$

よって， $b = -a$

$P(x) = x^3 - x^2 + ax - a$

$= x^2(x - 1) + a(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 + a)$

$Q(x) = (x^2 + a)$ も $x - 1$ で割り切れる。

$Q(1) = 1^2 + a = 0$

したがって， $a = -1, b = 1$

問題 $P(x) = x^3 + x^2 + ax + b$

1. 次の整式を $x + 1$ で割ったときの余りが 0 のとき，定数 a の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + a$

剰余定理により

$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 2 \times (-1) + a = a - 2 = 0$

したがって， $a = 2$

問題 $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + a$

2. 整式 $P(x)$ を $(x - 1)(x - 3)$ で割ったとき，定数 a, b の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ ，余り $2x - 1$

剰余定理により

$P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + a \times 1 + b = 2 \times 1 - 1$

$a + b = 2 \qquad \cdots$

$P(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 + a \times 3 + b = 2 \times 3 - 1$

$3a + b = -4 \qquad \cdots$

， を解いて $a = -3, b = 5$

問題 $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ ，余り $-x + 2$

3. 次の整式が $(x + 1)^2$ で割り切れるとき，定数 a, b の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$

$(x + 1)^2$ で割り切れるから， $x + 1$ で割り切れる。

剰余定理により

$P(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + a \times (-1) + b = 0$

よって， $b = a - 2$

$P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + a - 2$

$= (x^2 + 2x - 2)(x + 1) + a(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 2x - 2 + a)$

$Q(x) = (x^2 + 2x - 2 + a)$ も $x + 1$ で割り切れる。

$Q(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 2 + a = 0$

したがって， $a = 3, b = 1$

問題 $P(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$

1. 次の整式を $x - 1$ で割ったときの余りが 0 のとき，定数 a の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 - 7x + a$

剰余定理により

$$P(1) = 1^3 - 7 \times 1 + a = a - 6 = 0$$

したがって， $a = 6$

問題 $P(x) = x^3 - 3x + a$

2. 整式 $P(x)$ を $(x - 2)(x - 3)$ で割ったとき，定数 a, b の値を求めよ。

例題 $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ ，余り $2x - 4$

剰余定理より

$$P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + a \times 2 + b = 2 \times 2 - 4$$

$$2a + b = 0 \quad \cdots$$

$$P(3) = 3^3 - 2 \times 3^2 + a \times 3 + b = 2 \times 3 - 4$$

$$3a + b = -7 \quad \cdots$$

， を解いて $a = -7, b = 14$

問題 $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ ，余り $3x - 1$

3. 剰余定理を利用して，次の問題を解きなさい。

例題 整式 $P(x)$ を $x - 1, x - 2$ で割ったときの余りがそれぞれ $3, 5$ であるとき， $(x - 1)(x - 2)$ で割ったときの余りを求めよ。

整式 $P(x)$ を $(x - 1)(x - 2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ ，余りを $ax + b$ とすると

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$$

$x - 1$ で割った余りが 3 であるから

$$P(1) = (1 - 1)(1 - 2)Q(1) + a \times 1 + b = a + b = 3 \quad \cdots$$

$x - 2$ で割った余りが 5 であるから

$$P(2) = (2 - 1)(2 - 2)Q(2) + a \times 2 + b = 2a + b = 5 \quad \cdots$$

， より $a = 2, b = 1$

よって，求める余りは $2x + 1$

問題 整式 $P(x)$ を $x - 2, x - 3$ で割ったときの余りがそれぞれ $4, 7$ であるとき， $(x - 2)(x - 3)$ で割ったときの余りを求めよ。