

数学 高次方程式 ()年()組()番()

整式 P(x)が x の n 次式のとき、P(x)= 0を n 次方程式という。

$x^3 + 3x + 4 = 0$ は、() 次方程式、 $x^4 + x^2 - 12 = 0$ は、() 次方程式になる。

3 次以上の方程式を()という。

2 次方程式は、因数分解や解の公式によって解ける。そこで、3 次以上の方程式は、

2 次式以下に因数分解できれば、解くことができる。n 次方程式は n 個の解をもつ。

$X^3 = k$ の解

$x^3 = 1$ の解を 考 えてみる。移項して、 $x^3 - 1 = 0$ を解く。

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ であるから

($x - 1 = 0$) または ($x^2 + x + 1 = 0$)

よって、($x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$)

3 乗 して 1 となる解を 1 の 3 乗 根または 1 の立方根という。

問題 A 1 の 3 乗 根のうち虚数解の 1 つを (オメガ) とするとき、次の事を示せ。

(1) $\omega^3 = 1$

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とすると、 $\omega^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\omega^3 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right) = 1$

(2) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ とすると、

$\omega^2 + \omega + 1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + 1 = 0$

解の公式は 4 次式までしかない！！

3 次方程式の解の公式は、イタリアの科学者タルターリアが発見し、公開しなかった。

それをカルダノが聞き出し、1545 年に弟子のフェラーリが発見した 4 次方程式の解の公式とともに勝手に発表したためカルダノの解法と言われている。

5 次方程式の公式がないことは 1824 年にノルウェーのアーベルによって証明された。

$X^2 = X$ による因数分解

$x^4 - x^2 - 12 = 0$ の解を 考 えてみる。 $x^2 = X$ とすると

$x^4 - x^2 - 12 = X^2 + X - 12 = (X - 3)(X + 4) = (x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0$

よって ($x^2 = 3$, $x^2 = -4$) したがって、($x = \pm\sqrt{3}$, $\pm 2i$)

因数定理よる方法

$x^3 - 3x - 2 = 0$ の解を 考 えてみる。掛けて - 2 になる数 (± 1 , ± 2) に見当をつける。

P(x) = $x^3 - 3x - 2$ とおくと、P() = ()³ - 3() - 2 = 0 となる。

因数定理により、P(x) は ($x = -1$) の解をもつ。

よって、P(x) = (x + 1)(x² - x - 2) = (x + 1)²(x - 2) となる。

したがって、求める解は ($x = -1$) (2 重 解) , ($x = 2$)

問題 B 次の方程式を解け。

(1) $x^3 - 8 = 0$ (2) $x^3 + 27 = 0$

(3) $x^4 - 16 = 0$ (4) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

(5) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ (6) $x^3 + x^2 - 7x + 2 = 0$