数学Ⅱ　解と係数の関係　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　　)

1．次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を求めよ。

Find the sum and product of the two solutions of the following quadratic equation.

$ax^2+bx+c=0$ のとき $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

例題①　$2x^2+5x-1=0$

$D=5^2-4\times 2\times(-1)=33$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2\times 2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

和　$\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}+\dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}=-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{5}{2}$

積　$\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}\times\dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}$

$=\dfrac{(-5)^2-(\sqrt{33})^2}{16}=\dfrac{-8}{16}=-\dfrac{1}{2}$

問題①　$3x^2+5x-1=0$

例題②　$2x^2+3x+1=0$

$(2x+1)(x+1)=0$　より

$x=-\dfrac{1}{2},\ -1$

和　$\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-1)=-\dfrac{3}{2}$

積　$\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)=\dfrac{1}{2}$

問題②　$3x^2+4x+1=0$

2．次の 2 次方程式の解を α,β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

When α and β are solutions of the following quadratic equation, find the value of $\alpha^2+\beta^2$.

例題　$4x^2+5x+1=0$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{5}{4}$，$\alpha\times\beta=\dfrac{1}{4}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\left(-\dfrac{5}{4}\right)^2-2\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{25}{16}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{16}$

問題　$5x^2+6x+1=0$

3．次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。

Find a quadratic equation whose solutions are the following two numbers.

例題　$3+2i$ と $3-2i$

解の和は $(3+2i)+(3-2i)=6$

解の積は $(3+2i)\times(3-2i)=9-4i^2=13$

よって，求める2次方程式の一つは

$x^2-6x+13=0$

問題　$2+i$ と $2-i$

数学Ⅱ　解と係数の関係　2　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

1．次の 2 次方程式の解を α, β とするとき，$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ の値を求めよ。

When α and β are solutions of the following quadratic equation, find the value of $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$.

例題　$3x^2-x-2=0$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)$，$\alpha\times\beta=-\dfrac{2}{3}$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)\times\alpha\beta$

$=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{2}{9}$

問題　$2x^2-x-3=0$

2．次の 2 次方程式の解を α, β とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

When α and β are solutions of the following quadratic equation, find the value of $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$.

例題　$3x^2+4x+1=0$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{3}$，$\alpha\times\beta=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=\left(-\dfrac{4}{3}\right)\div\dfrac{1}{3}=\left(-\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{3}{1}=-4$

問題　$2x^2+3x+1=0$

3．次の 2 次方程式の解を α, β とするとき，次の値を解とする 2 次方程式を一つを求めよ。

When α and β are solutions of the following quadratic equation, find the quadratic equation whose solution is the following values.

例題　$x^2+2x+3=0$ の解を α, β とするとき，$\alpha-1$，$\beta-1$ を解とする 2 次方程式を求めよ。

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{1}=-2$，$\alpha\times\beta=\dfrac{3}{1}=3$

$(\alpha-1)+(\beta-1)$

$=(\alpha+\beta)-2=-2-2=-4$

$(\alpha-1)\times(\beta-1)$

$=(\alpha\times\beta)-(\alpha+\beta)+1=3-(-2)+1=6$

よって，求める2次方程式の一つは

$x^2+4x+6=0$

問題①　$x^2+6x+8=0$ の解を α, β とするとき，$\alpha+1$，$\beta+1$ を解とする 2 次方程式を求めよ。

問題②　$x^2+4x+3=0$ の解を α, β とするとき，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式を求めよ。

数学Ⅱ　解と係数の関係　3　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を求めよ。
Find the sum and product of the two solutions of the following quadratic equation.

$ax^2+bx+c=0$ のとき $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

例題①　$3x^2-5x+1=0$

$D=(-5)^2-4\times3\times1=13$

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{13}}{2\times3}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$

和 sum　$\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}+\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$

積 product　$\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\times\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$

$=\dfrac{5^2-(\sqrt{13})^2}{36}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

問題①　$2x^2-5x+1=0$

例題②　$3x^2+2x-1=0$

$(3x-1)(x+1)=0$　より

$x=\dfrac{1}{3}\ ,\ -1$

和 sum　$\left(\dfrac{1}{3}\right)+(-1)=-\dfrac{2}{3}$

積 product　$\left(\dfrac{1}{3}\right)\times(-1)=-\dfrac{1}{3}$

問題②　$2x^2+x-1=0$

2．次の 2 次方程式の解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。
When α and β are solutions of the following quadratic equation, find the value of $\alpha^2+\beta^2$.

例題　$2x^2+5x+3=0$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{5}{2}\ ,\ \alpha\times\beta=\dfrac{3}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2-2\times\dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{25}{4}-3=\dfrac{13}{4}$

問題　$3x^2+5x+2=0$

3．次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。
Find a quadratic equation whose solutions are the following two numbers.

例題　$1+2i$ と $1-2i$

解の和は $(1+2i)+(1-2i)=2$

解の積は $(1+2i)\times(1-2i)=1-4i^2=5$

よって，求める2次方程式の一つは

$x^2-2x+5=0$

問題①　$3+i$ と $3-i$

問題②　$1+\sqrt{3}\,i$ と $1-\sqrt{3}\,i$

数学Ⅱ　解と係数の関係(実数解の符号)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題　2次方程式 $x^2+2mx+m+6=0$ が次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
※2次方程式の解を α, β，判別式を D とする。

(1) 異なる2つの実数解　　2 different real solutions

$D=(2m)^2-4\times1\times(m+6)$

$=4m^2-4m-24>0$

$m^2-m-6>0$

$(m-3)(m+2)>0$　より　$m<-2,\ 3<m$

(2) 異なる2つの正の解　　2 different positive solutions

$D>0$　かつ　$\alpha+\beta>0$ かつ　$\alpha\beta>0$

$D>0$　より　$m<-2,\ 3<m$

$\alpha+\beta=-2m>0$　より　$m<0$

$\alpha\beta=m+6>0$　より　$m>-6$

したがって，$-6<m<-2$

(3) 異なる2つの負の解　　2 different negative solutions

$D>0$　かつ　$\alpha+\beta<0$ かつ　$\alpha\beta>0$

$D>0$　より　$m<-2,\ 3<m$

$\alpha+\beta=-2m<0$　より　$m>0$

$\alpha\beta=m+6>0$　より　$m>-6$

したがって，$m>3$

(4) 符号の異なる解　　Solutions with different signs

$\alpha\beta=m+6<0$ より $m<-6$

したがって，$m<-6$

※$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ より　$\alpha\beta<0$ のときは $D>0$

When the quadratic equation $x^2+2mx+m+6=0$ has the following solution, find the range of the constant m.　※Let α, β be the solution of the quadraticequation, and D be the discriminant.

問題　2次方程式 $x^2+2mx+2m+3=0$ が次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
※2次方程式の解を α, β，判別式を D とする。

(1) 異なる2つの実数解

(2) 異なる2つの正の解

(3) 異なる2つの負の解

(4) 符号の異なる解

数学Ⅱ　解と係数の関係(実数解の符号) 2　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

例題　2 次方程式 $x^2+2(m-3)x+4m=0$ が次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
※ 2 次方程式の解を α, β，判別式を D とする。

(1) 異なる 2 つの実数解　　2 different real solutions

$D=\{2(m-3)\}^2-4\times1\times4m$

$=4m^2-40m+36>0$

$m^2-10m+9>0$

$(m-1)(m-9)>0$　より　$m<1$, $9<m$

(2) 異なる 2 つの正の解　　2 different positive solutions

$D>0$　かつ　$\alpha+\beta>0$　かつ　$\alpha\beta>0$

$D>0$　より　$m<1$, $9<m$

$\alpha+\beta=-2(m-3)>0$　より　$m<3$

$\alpha\beta=4m>0$　より　$m>0$

したがって，$0<m<1$

(3) 異なる 2 つの負の解　　2 different negative solutions

$D>0$　かつ　$\alpha+\beta<0$　かつ　$\alpha\beta>0$

$D>0$　より　$m<1$, $9<m$

$\alpha+\beta=-2(m-3)<0$　より　$m>3$

$\alpha\beta=4m>0$　より　$m>0$

したがって，$m>9$

(4) 符号の異なる解　　Solutions with different signs

$\alpha\beta=m<0$ より $m<0$

したがって，$m<0$

※ $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ より　$\alpha\beta<0$ のときは $D>0$

When the quadratic equation $x^2+2(m-3)x+4m=0$ has the following solution, find the range of the constant m.　※Let α, β be the solution of the quadraticequation, and D be the discriminant.

問題　2 次方程式 $x^2+2(m-2)x+m=0$ が次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
※ 2 次方程式の解を α, β，判別式を D とする。

(1) 異なる 2 つの実数解

(2) 異なる 2 つの正の解

(3) 異なる 2 つの負の解

(4) 符号の異なる解

数学Ⅱ　解と係数の関係(実数解の符号)　3　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

例題　2次方程式 $x^2 + mx + m + 3 = 0$ が次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
※ 2次方程式の解を α, β，判別式を D とする。

(1) 異なる2つの実数解　　2 different real solutions

$D = m^2 - 4 \times 1 \times (m+3)$

$= m^2 - 4m - 12 > 0$

$(m-6)(m+2) > 0$　より　$m < -2$, $6 < m$

(2) 異なる2つの正の解　　2 different positive solutions

$D > 0$　かつ　$\alpha + \beta > 0$　かつ　$\alpha\beta > 0$

$D > 0$　より　$m < -2$, $6 < m$

$\alpha + \beta = -m > 0$　より　$m < 0$

$\alpha\beta = m + 3 > 0$　より　$m > -3$

したがって，$-3 < m < -2$

(3) 異なる2つの負の解　　2 different negative solutions

$D > 0$　かつ　$\alpha + \beta < 0$　かつ　$\alpha\beta > 0$

$D > 0$　より　$m < -2$, $6 < m$

$\alpha + \beta = -m < 0$　より　$m > 0$

$\alpha\beta = m + 3 > 0$　より　$m > -3$

したがって，$m > 6$

(4) 符号の異なる解　　Solutions with different signs

$\alpha\beta = m + 3 < 0$ より $m < -3$

したがって，$m < -3$

※ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ より　$\alpha\beta < 0$ のときは $D > 0$

When the quadratic equation $x^2+mx+m+3=0$ has the following solution, find the range of the constant m.　※Let α, β be the solution of the quadraticequation, and D be the discriminant.

問題　2次方程式 $x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ が次のような解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。
※ 2次方程式の解を α, β，判別式を D とする。

(1) 異なる2つの実数解

(2) 異なる2つの正の解

(3) 異なる2つの負の解

(4) 符号の異なる解

数学Ⅱ　解と係数の関係(因数分解)　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の２次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

Factorize the following quadratic equation in the range of complex numbers.

例題①　x^2+4x+5

$x^2+4x+5=0$ の解は

$D=4^2-4\times1\times5=-4$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2\times1}=\frac{-4\pm\sqrt{4}\,i}{2}$$

※虚数

$=-2\pm i$

よって　x^2+4x+5

$=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}$

$=(x+2-i)(x+2+i)$

問題①　x^2+2x+2

例題②　$2x^2+4x+1$

$2x^2+4x+1=0$ の解は

$D=4^2-4\times2\times1=8$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2\times2}=\frac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$$

※実数

よって　$2x^2+4x+1$

$$=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

問題②　$2x^2+6x+1$

2．次の２次方程式を因数分解した形で表せ。

Express the following quadratic equation in factorized form.

例題　２次方程式 $x^2-6x+m=0$ の１つの解が他の解の２倍のとき，方程式を因数分解した形で表せ。

When one solution of the quadratic equation $x^2-6x+m=0$ is twice as large as the other solutions, express the equation in factorized form.

2つの解は α，2α と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+2\alpha=6$　　よって　$\alpha=2$

$\alpha\times2\alpha=m$　　よって　$m=8$

2つの解は 2 と4 であり，$m=8$ になる。

方程式は $(x-2)(x-4)=0$ になる。

問題①　２次方程式 $x^2-6x+m=0$ の１つの解が他の解の５倍のとき，方程式を因数分解した形で表せ。

When one solution of the quadratic equation $x^2-6x+m=0$ is 5 times as large as the other solutions, express the equation in factorized form.

問題②　２次方程式 $x^2-6x+m=0$ の２つの解の差が２のとき，方程式を因数分解した形で表せ。

When the difference between the solutions of the quadratic equation $x^2-6x+m=0$ is 2, express the equation in factorized form.

数学Ⅱ　解と係数の関係(因数分解)　2　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の2次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

Factorize the following quadratic equation in the range of complex numbers.

例題①　x^2+4

$x^2+4=0$ の解は

$D=0^2-4\times1\times4=-16$

$x=\dfrac{-0\pm\sqrt{-16}}{2\times1}=\dfrac{\pm\sqrt{16}\,i}{2}$　※純虚数

$=\pm2i$

よって　x^2+4

$=\{x-(2i)\}\{x-(-2i)\}$

$=(x-2i)(x+2i)$

問題①　x^2+9

例題②　$3x^2+x+2$

$3x^2+x+2=0$ の解は

$D=1^2-4\times3\times2=-23$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-23}}{2\times3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{23}\,i}{6}$　※虚数

よって　$3x^2+4x+1$

$=3\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{23}\,i}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{23}\,i}{2}\right)$

問題②　$3x^2+2x+1$

2．次の2次方程式を因数分解した形で表せ。

Express the following quadratic equation in factorized form.

例題　2次方程式 $x^2+4x+m=0$ の2つの解の差が2のとき，方程式を因数分解した形で表せ。

When the difference between the solutions of the quadratic equation $x^2+4x+m=0$ is 2, express the equation in factorized form.

2つの解はα，α+2と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+(\alpha+2)=-4$　よって　$\alpha=-6$

$\alpha\times(\alpha+2)=m$　よって　$m=24$

2つの解は -6と-4 であり，$m=24$ になる。

方程式は $(x+6)(x+4)=0$ になる。

問題①　2次方程式 $x^2+2x+m=0$ の2つの解の差が2のとき，2次式を因数分解した形で表せ。

When the difference between the solutions of the quadratic equation $x^2+2x+m=0$ is 2, express the equation in factorized form.

問題②　2次方程式 $x^2+8x+m=0$ の1つの解が他の解の2倍のとき，2次式を因数分解した形で表せ。

When one solution of the quadratic equation $x^2+8x+m=0$ is twice as large as the other solutions, express the equation in factorized form.

数学Ⅱ　解と係数の関係(因数分解)　3　課題　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。
Factorize the following quadratic equation in the range of complex numbers.

例題①　$x^2+6x+10$

$x^2+6x+10=0$ の解は

$D=6^2-4\times1\times10=-4$

$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{-4}}{2\times1}=\dfrac{-6\pm\sqrt{4}\,i}{2}$　※虚数

$=-3\pm i$

よって　$x^2+6x+10$

$=\{x-(-3+i)\}\{x-(-3-i)\}$

$=(x+3-i)(x+3+i)$

問題①　x^2+4x+8

例題②　$3x^2+2x+1$

$3x^2+2x+1=0$ の解は

$D=2^2-4\times3\times1=-8$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{8}\,i}{2\times3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}\,i}{3}$　※実数

よって $3x^2+2x+1$

$=3\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{2}\,i}{3}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{2}\,i}{3}\right)$

問題②　$2x^2+2x+1$

2．次の 2 次方程式を因数分解した形で表せ。
Express the following quadratic equation in factorized form.

例題　2 次方程式 $x^2-4x+m=0$ の 1 つの解が他の解の 3 倍のとき，方程式を因数分解した形で表せ。

2つの解は α, 3α と表すことができる。
解と係数の関係から

$\alpha+3\alpha=4$　　よって　$\alpha=1$

$\alpha\times3\alpha=m$　　よって　$m=3$

2つの解は 1 と3 であり，$m=3$ になる。

方程式は $(x-1)(x-3)=0$ になる。

問題①　2 次方程式 $x^2-5x+m=0$ の 1 つの解が他の解の 4 倍のとき，方程式を因数分解した形で表せ。

問題②　2 次方程式 $x^2-5x+m=0$ の 2 つの解の差が 3 のとき，方程式を因数分解した形で表せ。