数学Ⅱ　解と係数の関係　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

解と係数の関係

2 次方程式 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ の 2 つの解の和と積を求めてみよう。

$2x^2 - 3x + 1 = (2x - \quad)(x - \quad) = 0$ より，$\left(x = \underline{\quad},\quad \right)$ になる。

ゆえに，解の和は$\left(\underline{\quad} + \quad = \underline{\quad} \right)$，解の積は$\left(\underline{\quad} \times \quad = \underline{\quad} \right)$になる。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解$(\alpha,\ \beta)$の和と積を求めると，$D = b^2 - 4ac$

$$\alpha + \beta = \frac{-\sqrt{\quad}}{\quad} + \frac{+\sqrt{\quad}}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\alpha \times \beta = \frac{-\sqrt{\quad}}{\quad} \times \frac{+\sqrt{\quad}}{\quad} = \frac{(\quad)^2 - \quad}{\quad}$$

$$= \underline{\qquad\qquad}$$

このように，2 次方程式の 2 つの解の和と積は，その係数を用いて表すことができる。
これを，$\big($2 次方程式の　　　　　　　$\big)$という。

解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha + \beta = \underline{\quad} \qquad \alpha \times \beta = \underline{\quad}$$

問題 A　次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を求めよ。

(1) $x^2 - 3x + 2 = 0$　　(2) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

問題 B　2 次方程式 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ の解を α，β とするとき，次の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$

$= \dfrac{\quad}{\alpha\beta} + \dfrac{\quad}{\alpha\beta} = \dfrac{\quad}{\alpha\beta}$

2次式の因数分解

実数の範囲では，2 次式 $ax^2 + bx + c$ は因数分解できるとは限らないが，複素数の範囲まで拡張すると，解と係数の関係により，**必ず因数分解できる。**

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{\quad}{\quad}x + \frac{\quad}{\quad}\right) = a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} = a(x - \quad)(x - \quad)$$

2次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$ax^2 + bx + c = a(x - \quad)(x - \quad)$$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ の解は $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4\times1\times(-1)}}{2\times1} = \quad \pm\sqrt{\quad}$

ゆえに　$x^2 - 2x - 1 = \{x - (\quad - \sqrt{\quad})\}\{x - (\quad + \sqrt{\quad})\}$

$= (x - \quad + \sqrt{\quad})(x - \quad - \sqrt{\quad})$

$x^2 + 2x + 2 = 0$ の解は $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\times1\times2}}{2\times1} = \quad \pm\sqrt{\quad} = $

ゆえに　$x^2 + 2x + 2 = \{x - (\quad - \quad)\}\{x - (\quad + \quad)\}$

$= (x + \quad + \quad)(x + \quad - \quad)$

問題 C　2 次式 $2x^2 - 8x + 10$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

数学Ⅱ　2数を解とする2次方程式　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

2数を解とする2次方程式

2 数 α, β を解とし，x^2 の係数が 1 である 2 次方程式は $(x-\quad)(x-\quad)=0$ である。

$(x-\quad)(x-\quad)=x^2-(\quad+\quad)x+\qquad=0$ になる。

$1-i$，$1+i$ を解とし，x^2 の係数が 1 である 2 次方程式は，

解の和$=(1-i)+(1+i)=(\qquad)$，解の積 $(1-i)\times(1+i)=(\qquad)$

したがって，$(x^2-\quad x+\quad=0)$

問題 A　次の 2 数を解とし，x^2 の係数が 1 である 2 次方程式をつくれ。

(1) $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$

$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})$

$(1-\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2})$

(2) $1-2i$, $1-2i$

$(1-2i)+(1+2i)$

$(1-2i)\times(1+2i)$

問題 B　$x^2-4x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha-1$，$\beta-1$ を解とし，x^2の係数が 1 の 2 次方程式を求めよ。

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=$　　　　　　，$\alpha\times\beta=$

よって，$(\alpha-1)+(\beta-1)=$

$(\alpha-1)\times(\beta-1)=$

したがって，求める 2 次方程式は

問題 C　$2x^2-3x+1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，2α，2β を解とし，x^2の係数が 1 の 2 次方程式を求めよ。

与えられた条件を満たす2次方程式

$x^2+2ax+a+2=0$ が異なる 2 つの正の解をもつような a の値の範囲を考える。

実数解をもつことより $D\geqq 0$ になる。

$D=(\qquad)^2-4\times\qquad\times(\qquad)=$

ゆえに

2 つの解を α, β とすると $\alpha>0$, $\beta>0$ より，$\alpha+\beta>0$, $\alpha\times\beta>0$ になる。

$\alpha+\beta=$　　　　　　　　　　　　　　　　より，

$\alpha\times\beta=$　　　　　　　　　　　　　　　　より，

すべての条件を満たす範囲が答えであるから

応用問題 D　2 次方程式 $x^2-2ax-a+6=0$ が正と負の解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

問題 E　2 次方程式 $x^2+6x+k=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき，k の値を求めよ。