

数学 命題と集合 ()年()組()番()

命題と真偽

数学では、文字や記号を使って、事柄を簡潔に表す。ある判断を述べた文や式の中で、正しい(), 正しくない()が、はっきり決められるものを()という。

「 $x = 1$ ならば $x^2 = 1$ 」は真の命題である。
「 $x^2 = 1$ ならば $x = 1$ 」は偽の命題である。 $x^2 = 1$ は $x = -1$ の場合もある。
偽であることを示すには、成り立たない例(反例)を示す。

「 p ならば q である」を「 $p \rightarrow q$ 」で表す。この p を(), q を()という。

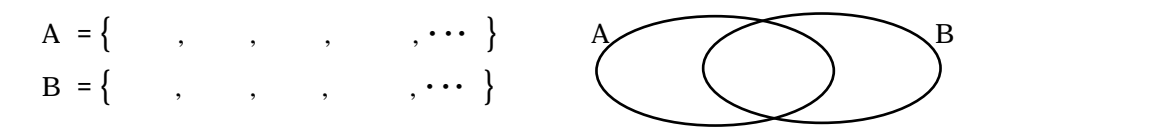
「 $x = 1 \rightarrow x^2 = 1$ 」の仮定は「 $x = 1$ 」、結論は「 $x^2 = 1$ 」になる。
文や式 中の文字の 値 を変えると、真偽が変わるものを()という。
条件は p, q などの文字で表すことがある。

問題 A 次の命題の真偽を調べよ。偽なら反例を示せ。

- (1) $a^2 = b^2 \rightarrow a = b$ (2) $x > y \rightarrow x^2 > y^2$

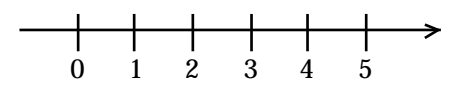
命題と集合

命題「 n は正の 6 の倍数 $\rightarrow n$ は正の 3 の倍数」の真偽を考える。
 A を正の 6 の倍数の集合、 B を正の 3 の倍数の集合とする。



よって () になり、
命題「 n は正の 6 の倍数 $\rightarrow n$ は正の 3 の倍数」は () になる。
命題「 $p \rightarrow q$ 」において、 p を満たす集合を P , q を満たす集合を Q とすると、
 $P \subset Q$ が成り立つときは命題「 $p \rightarrow q$ 」は 真 になる。

問題 B 命題「 $x > 4 \rightarrow x > 2$ 」の真偽を数直線上に図示して、求めなさい。



必要条件と十分条件

p が成り立つときには、必ず q が成り立つとき、
「 q は p の(条件)である」 $q \rightarrow p$
「 p は q の(条件)である」という。 $p \rightarrow q$
「 $p \rightarrow q$ 」と「 $q \rightarrow p$ 」がともに真のとき「 $p \rightarrow q$ 」と表し、必要十分条件になる。
このとき、 p と q は同値であるという。



・「 $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$ 」の命題は真であるから、
「 $x = 2$ は $x^2 = 4$ の十分条件である」 $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$
「 $x^2 = 4$ は $x = 2$ の必要条件である」 $x^2 = 4 \rightarrow x = 2$ 左向き

問題 C 次の p, q において、命題「 $p \rightarrow q$ 」、命題「 $q \rightarrow p$ 」の真偽を調べ、 p, q が必要十分条件になっているものを選びなさい。

- (1) $p: x = 3$ $q: 2x - 5 = 1$ (2) $p: x = 3$ $q: x^2 = 9$

$p \rightarrow q$ $p \rightarrow q$
 $q \rightarrow p$ $q \rightarrow p$

- (3) $p: a = b$ $q: a \times c = b \times c$ (4) $p: x^2 = 4$ $q: -2 \leq x \leq 2$

$p \rightarrow q$ $p \rightarrow q$
 $q \rightarrow p$ $q \rightarrow p$

問題 D 次の [] に「十分」、「必要」、「必要十分」のいずれかを記入しなさい。

(1) $x^2 + y^2 = 0$ は $x = y = 0$ であるための [] 条件である。

(2) $x > 3$ は $x^2 > 9$ であるための [] 条件である。

(3) $xy = 0$ は $x = 0$ であるための [] 条件である。