

1. △ABC の残りの辺の長さを求めよ。

3. △ABC の残りの辺の長さと、角の大きさを求めよ。

れいだい

例題

$a = 2, b = 2\sqrt{3}, A = 30^\circ$

よげんていり

余弦定理より

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$2^2 = (2\sqrt{3})^2 + c^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times c \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2 - 6c + 8 = 0$

$(c - 2)(c - 4) = 0$ より $c = 2, 4$

もんだい

問題

$a = 7, b = 8, A = 60^\circ$

2. 次の三角形はどのような形をしているか。

れいだい

例題

$a^2 - b^2 = c^2 - bc$

$a^2 - b^2 = c^2 - bc$ より

$a^2 - b^2 - c^2 = -bc \qquad \cdots \textcircled{1}$

よげんていり

余弦定理より

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ より

$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A \qquad \cdots \textcircled{2}$

①, ②より $-bc = -2bc \cos A$

$\cos A = \frac{1}{2}$ より, $A = 60^\circ$

もんだい

問題①

$a^2 - b^2 = c^2 + bc$

もんだい

問題②

$a^2 - b^2 = c^2$

れいだい

例題

$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3} - 1, C = 135^\circ$

よげんていり

余弦定理より

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1) \times \cos 135^\circ$

$= 2 + 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 4$

$c > 0$ より $c = \sqrt{4} = 2$

せいげんていり

正弦定理より

$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\sin 135^\circ}$

$= 2 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

よって $A = 30^\circ$ ($A = 150^\circ$ は不適)

$B = 180^\circ - 30^\circ - 135^\circ = 15^\circ$

$c = 2, A = 30^\circ, B = 15^\circ$

もんだい

問題

$a = 2, b = 1 + \sqrt{3}, C = 30^\circ$

1. 次の三角形はどのような形かたちをしているか。

れいだい
例題

$a \cos A = b \cos B$

よげんていり
余弦定理より

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$a \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

りょうへん
両辺に $2abc$ をかけて

$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$

$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 + a^2b^2 - b^4$

$a^2c^2 - b^2c^2 - a^4 + b^4 = 0$

$c^2(a^2 - b^2) - (a^4 - b^4) = 0$

$c^2(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 0$

$(a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$

よって, $a^2 - b^2 = 0$ または $c^2 = a^2 + b^2$

にとうへんさんかくけい
 $a = b$ の二等辺三角形 または $C = 90^\circ$

もんだい
問題

$b \cos A = a \cos B$

3. $\triangle ABC$ の残りのこの辺へんの長さながと, 角かくの大きさおおもとを求めよ。

れいだい
例題

$b = \sqrt{6}$, $A = 45^\circ$, $C = 75^\circ$

$B = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$

せいげんていり
正弦定理より

$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = 3 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$

$a = 2R \sin A = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

よげんていり
余弦定理より

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$2^2 = (\sqrt{6})^2 + c^2 - 2 \times \sqrt{6} \times c \times \cos 45^\circ$

$c^2 - 2\sqrt{3}c + 2 = 0$

$c = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2}$

$c = \frac{2\sqrt{3} \pm 2}{2} = \sqrt{3} \pm 1$

さいだいかく
 C が最大の角より, $c = \sqrt{3} + 1$

よって, $a = 2$, $c = \sqrt{3} + 1$, $B = 60^\circ$

もんだい
問題

$b = \sqrt{2}$, $A = 45^\circ$, $C = 105^\circ$

1. △ABC の残りの辺の長さ、角の大きさを求めよ。

れいだい
例題

$a = 2, \quad b = \sqrt{6} - \sqrt{2}, \quad C = 135^\circ$

よげんていり
余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$= 2^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times \cos 135^\circ$$
$$= 4 + 8 - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 4 = 8$$
$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

せいげんていり
正弦定理より

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}$$
$$= 2\sqrt{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$
$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

よって $A = 30^\circ$ ($A = 150^\circ$ は不適)

$B = 180^\circ - 30^\circ - 135^\circ = 15^\circ$

$c = 2\sqrt{2}$, $A = 45^\circ$, $B = 15^\circ$

もんだい
問題

$a = 2, \quad b = \sqrt{3} - 1, \quad C = 120^\circ$

2. △ABC の最大の角の大きさを求めよ。

れいだい
例題

$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$

せいげんていり
正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

よって,

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$$

このとき、正の数 k を用いると

$$a = k, \quad b = \sqrt{2}k, \quad c = \sqrt{5}k$$

あらわ
と表すことができる。

c が最大の辺であるから、 C が最大の角になる。

よげんていり
余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{k^2 + (\sqrt{2}k)^2 - (\sqrt{5}k)^2}{2 \times k \times \sqrt{2}k}$$
$$= \frac{-2k^2}{2\sqrt{2}k^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より } \underline{\underline{C = 135^\circ}}$$

もんだい
問題

$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{7}$