

1. △ABC の残りの辺の長さと，角の大きさを求めよ。  
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.
2. △ABC の最大の角の大きさを求めよ。  
Find the size of the largest angle of triangle △ABC.

例題  $a = 2$  ,  $b = 1 + \sqrt{3}$  ,  $C = 60^\circ$   
余弦定理より

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times (1 + \sqrt{3}) \times \cos 60^\circ \\ &= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} = 6 \\ c > 0 \text{ より } c &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

正弦定理より

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \\ &= \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} \\ \sin A &= \frac{a}{2R} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{よって } A &= 45^\circ \quad (A = 135^\circ \text{ は不適}) \\ B &= 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ \\ \underline{c = \sqrt{6}} \text{ , } \underline{A = 45^\circ} \text{ , } \underline{B = 75^\circ} \end{aligned}$$

問題  $a = \sqrt{2}$  ,  $b = 1 + \sqrt{3}$  ,  $C = 45^\circ$

例題  $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 8 : 13$   
正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

よって，  
 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 7 : 8 : 13$   
このとき，正の数  $k$  を用いると

$a = 7k$  ,  $b = 8k$  ,  $c = 13k$   
と表すことができる。

$c$  が最大の辺であるから， $C$  が最大の角になる。

余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(7k)^2 + (8k)^2 - (13k)^2}{2 \times 7k \times 8k} \\ &= \frac{-56k^2}{112k^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{より } \underline{\underline{C = 120^\circ}} \end{aligned}$$

問題  $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$

1. △ABC の残りの辺の長さと，角の大きさを求めよ。  
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.
2. 次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形であるか。  
What kind of triangle is △ABC when the following equation holds true?

れいだい  
例題  $a = 2$  ,  $b = \sqrt{3} - 1$  ,  $C = 120^\circ$

よげんていり  
余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3} - 1) \times \cos 60^\circ$$
$$= 4 + 4 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} = 6$$
$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{6}$$

せいげんていり  
正弦定理より

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$
$$= \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって  $A = 45^\circ$  ,  $(A = 135^\circ \text{ は不適})$

$$B = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

$c = \sqrt{6}$  ,  $A = 45^\circ$  ,  $B = 15^\circ$

もんだい  
問題  $a = 2$  ,  $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$  ,  $C = 135^\circ$

れいだい  
例題  $\sin A = 2 \sin B \times \cos C$

せいげんていり  
正弦定理より  $\sin A = \frac{a}{2R}$  ,  $\sin B = \frac{b}{2R}$

よげんていり  
余弦定理より  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

だいにゆう  
よって，代入すると

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

りょうへん  
両辺に  $2aR$  を掛けると

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

ゆえに  $b^2 = c^2$

△ABC は  $b = c$  の二等辺三角形 である。

もんだい  
問題①  $b \sin B = c \sin C$

もんだい  
問題②  $\sin A \times \cos B = \sin B \times \cos A$

1. △ABC の残りの辺の長さと，角の大きさを求めよ。  
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.
2. △ABC の最大の角の大きさを求めよ。  
Find the size of the largest angle of triangle △ABC.

れい だい  
例題  $a = 2$  ,  $b = 1 + \sqrt{3}$  ,  $C = 30^\circ$   
よ げん てい り  
余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times (1 + \sqrt{3}) \times \cos 30^\circ$$
$$= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6 = 2$$
$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{2}$$

せい げん てい り  
正弦定理より

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$
$$= \sqrt{2} \div \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって  $A = 45^\circ$  ( $B$  が最大より  $A = 135^\circ$  は不適)

$$B = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

$c = \sqrt{2}$  ,  $A = 45^\circ$  ,  $B = 105^\circ$

もん だい  
問題  $a = \sqrt{2}$  ,  $b = \sqrt{3} - 1$  ,  $C = 135^\circ$

れい だい  
例題  $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : 2 : \sqrt{7}$   
せい げん てい り  
正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

よって,

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{7}$$

このとき, 正の数  $k$  を用いると

$$a = k, b = 2k, c = \sqrt{7}k$$

あらわ  
と表すことができる。

$c$  が最大の辺であるから,  $C$  が最大の角になる。

よ げん てい り  
余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{k^2 + (2k)^2 - (\sqrt{7}k)^2}{2 \times k \times 2k}$$
$$= \frac{-2k^2}{4k^2} = -\frac{1}{2} \text{ より } \underline{\underline{C = 120^\circ}}$$

もん だい  
問題  $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$

1. △ABC の残りの辺の長さを求めよ。  
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.
3. △ABC の残りの辺の長さと，角の大きさを求めよ。  
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.

れいだい

例題

$a = 7, b = 8, A = 60^\circ$

よげんていり

余弦定理より

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$7^2 = 8^2 + c^2 - 2 \times 8 \times c \times \frac{1}{2}$$

$$c^2 - 8c + 15 = 0$$

$$(c - 3)(c - 5) = 0 \text{ より } c = 3, 5$$

もんだい

問題

$a = 2, b = 2\sqrt{3}, A = 30^\circ$

2. 次の三角形はどのような形をしているか。  
Find the following triangle shape.

れいだい

例題

$a^2 - b^2 = c^2 + bc$

$$a^2 - b^2 = c^2 + bc \text{ より}$$

$$a^2 - b^2 - c^2 = bc \cdots \textcircled{1}$$

よげんていり

余弦定理より

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } bc = -2bc \cos A$$

$$\cos A = -\frac{1}{2} \text{ より, } A = 120^\circ$$

もんだい

問題①

$a^2 - b^2 = c^2 - bc$

もんだい

問題②

$a^2 - c^2 = b^2$

れいだい

例題

$b = \sqrt{2}, A = 45^\circ, C = 105^\circ$

$$B = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

せいげんていり

正弦定理より

$$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \sqrt{2} \div \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$a = 2R \sin A = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

よげんていり

余弦定理より

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$2^2 = (\sqrt{2})^2 + c^2 - 2 \times \sqrt{2} \times c \times \cos 45^\circ$$

$$c^2 - 2c - 2 = 0$$

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2}$$

$$c = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$C \text{ が最大の角より, } c = \sqrt{3} + 1$$

$$\text{よって, } \underline{a = 2, c = \sqrt{3} + 1, B = 30^\circ}$$

もんだい

問題

$b = \sqrt{6}, A = 45^\circ, C = 75^\circ$



数学Ⅰ さん かつ けい    へん    かく   えん    ない せつ    か   だい 三角形の辺と角(円と内接) 2 課題

1.  $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  を求めよ。

Find the radius  $r$  of the inscribed circle of  $\triangle ABC$ .

例題  $a = 10, b = 17, c = 21$

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17^2 + 21^2 - 10^2}{2 \times 17 \times 21} \\ &= \frac{630}{714} = \frac{15}{17}\end{aligned}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  より

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64}{289}$$

$$\sin A > 0 \text{ and } \sin A = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

 $\triangle ABC$  の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} \times 17 \times 21 \times \frac{8}{17} = 84$$

ないせつえん      はんけい      りよう  
内接円の半径  $r$  を利用すると

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$$

$$= \frac{1}{2}(10 + 17 + 21)r = 24r$$

よって,  $24 \times r = 84$  より  $r = \frac{7}{2} = 3.5$

ないせつえん      はんけい  
内接円の半径  $r = 3.5$

もんだい  
問題  $a = 7, b = 15, c = 20$

( )年( )組( )番( )

2. 円に内接する四角形 ABCD の面積  $S$  を求めよ。

Find the area  $S$  of  $\square ABCD$  inscribed in the circle.

例題  $AB = 8, BC = 2, CD = 6, DA = 2$  の円に内接する四角形  $ABCD$  の面積  $S$  を求めよ。

えん    ないせつ    しか   つけい    たい   かく    わ  
円に内接する四角形の対角の和は $180^\circ$ であるから

$$\cos C = \cos (180^\circ - A) = -\cos A$$

 $\triangle ABD$  に余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}\text{BD}^2 &= \text{AB}^2 + \text{AD}^2 - 2 \times \text{AB} \times \text{AD} \times \cos A \\ &= 8^2 + 2^2 - 2 \times 8 \times 2 \times \cos A \\ &= 68 - 32 \cos A\end{aligned}$$

$\triangle BCD$  に余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}\text{BD}^2 &= \text{BC}^2 + \text{CD}^2 - 2 \times \text{BC} \times \text{CD} \times \cos C \\ &= 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \cos C \\ &= 40 - 24 \cos C = 40 + 24 \cos A\end{aligned}$$

$$68 - 32 \cos A = 40 + 24 \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}$$

よって,  $A = 60^\circ$ ,  $C = 120^\circ$

$$S = \triangle ABC + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 14\sqrt{3}$$

問題  $AB = 3, BC = 3, CD = 4, DA = 4$  の円に内接する四角形  $ABCD$  の面積  $S$  を求めよ。



1. △ABC の内接円の半径  $r$  を求めよ。  
Find the radius  $r$  of the inscribed circle of △ABC.
2. 円に内接する四角形 ABCD の対角線 BD を求めよ。  
Find the diagonal BD of □ABCD inscribed in the circle.

れいだい  
例題

$a = 17, b = 10, c = 9$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10^2 + 9^2 - 17^2}{2 \times 10 \times 9}$$
$$= \frac{-108}{180} = -\frac{3}{5}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  より

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$\sin A > 0$  より  $\sin A = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

めんせき  
△ABC の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 10 \times 9 \times \frac{4}{5} = 36$$

ないせつえん　はんけい　りょう  
内接円の半径  $r$  を利用すると

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$$
$$= \frac{1}{2}(17 + 10 + 9)r = 18r$$

よって,  $18r = 36$  より  $r = 2$

ないせつえん　はんけい  
内接円の半径  $r = 2$

もんだい  
問題

$a = 20, b = 13, c = 11$

れいだい  
例題

$AB = 2, BC = 3, CD = 2, DA = 2$  の円に  
内接する四角形 ABCD の辺 BD を求めよ。

△ABD に余弦定理を用いて,

$$BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2 \times AB \times DA \times \cos A$$
$$= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos A$$
$$= 8 - 8 \cos A$$

△BCD に余弦定理を用いて,

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \times \cos C$$
$$= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos C$$
$$= 13 - 12 \cos C$$

しかくけい　えん　ないせつ  
四角形 ABCD は円に内接し,  $A + C = 180^\circ$

$$\cos C = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

$$13 - 12 \cos A = 8 - 8 \cos A$$

よって,  $\cos A = \frac{1}{4}$

$$BD^2 = 8 - 8 \times \frac{1}{4} = 6$$
 ,  $BD = \sqrt{6}$

もんだい  
問題

$AB = 3, BC = 4, CD = 2, DA = 3$  の円に  
内接する四角形 ABCD の辺 AD を求めよ。