

数学 2次関数の最大・最小 ()年()組()番()

長さ 40 cm の針金で長方形を作りたい。縦の長さを x cm, 面積を y cm² として, 面積の最大値を求める。横の長さは () - x になるから, ($y = x$ () - x)) と表される。ただし, 辺の長さは正であるから, () $< x <$ () になる。
長方形の面積は $y = x$ () - x) = - x^2 + () x = - (x - ())² + () になる。この式のグラフは頂点((), ()), (() に凸) である。
よって, (x = ()) のとき最大になり, 面積は(() cm²) になる。

2次関数の最大値・最小値

・2次関数 $y = x^2 - 4x + 3$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 3 && \text{頂点((), ())} \\ &= (x - 2)^2 - 1 + 3 && \text{(() に凸)} \\ &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$

($x < 2$) の範囲で, y は減少している。

($x > 2$) の範囲で, y は増加している。

($x = 2$) のとき, 最小値(())になる。最大値は(())。

・2次関数 $y = -x^2 - 2x + 2$

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 2 && \text{頂点((), ())} \\ &= -(x^2 + 2x) + 2 && \text{(() に凸)} \\ &= -\{(x + 1)^2 - 1\} + 2 \\ &= -(x + 1)^2 + 1 + 2 \\ &= -(x + 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

($x < -1$) の範囲で, y は増加している。

($x > -1$) の範囲で, y は減少している。

($x = -1$) のとき, 最大値(())になる。最小値は(())。

・ $y = a(x - p)^2 + q$ の最大値・最小値

$a > 0$ のとき,

($x = p$) のとき最小値(())
最大値は(())

$a < 0$ のとき,

($x = p$) のとき最大値(())
最小値は(())

限られた範囲での2次関数の最大値・最小値

・2次関数 $y = x^2 + 2x$ (-3 x 0)

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2x && \text{頂点((), ())} \\ &= (x + 1)^2 - 1 && \text{(() に凸)} \end{aligned}$$

$x = -3$ のとき, ($y =$ ())

$x = 0$ のとき, ($y =$ ())

定義域の端点をして, 定義域を実線にする。 (x は () , x は ())

端点と頂点の座標より, 最大値と最小値を求める。

($x = -1$) のとき, 最大値(()), ($x = 0$) のとき, 最小値(())になる。

・2次関数 $y = -x^2 + 4x$ (0 x 1)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x && \text{頂点((), ())} \\ &= -(x^2 - 4x) && \text{(() に凸)} \end{aligned}$$

= - { ($x - 2$)² - 4 }

= - ($x - 2$)²

$x = 0$ のとき, ($y =$ ())

$x = 1$ のとき, ($y =$ ())

定義域を図示する。

($x = 0$) のとき, 最大値(()), ($x = 1$) のとき, 最小値(())になる。

・ $y = a(x - p)^2 + q$ の限られた範囲での最大値・最小値は, 定義域の端点と頂点より求める。端点が $x < p$ のときは定義域外のため, 最大値や最小値にならない。

問題 A 次の2次関数の最大値と最小値を求めなさい。

(1) $y = x^2 + 2x - 3$ (0 x 3) (2) $y = -x^2 - 6x$ (1 x 2)

