

数学B 推定 ()年()組()番()

母平均の推定(母標準偏差による)

ある集団から 1 つの標本を抽出して、標本平均から母平均を推定してみよう。

母平均 m 、母標準偏差の母集団から、大きさ n の標本を無作為に復元抽出する。

標本平均を \bar{X} とすると、 n が十分大きいとき、

\bar{X} の分布は、標準正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ で

近似できる。さらに、 \bar{X} を標準化すると

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ で } N(0, 1) \text{ に近似できる。}$$

正規分布表より、 $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$

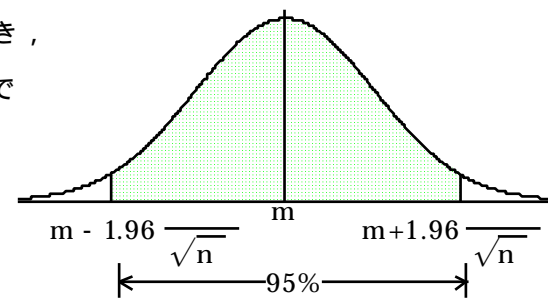
$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = 0.95$$

$$\text{よって、} P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

m の範囲 $\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ を

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間という。99% では 2.58

問題 A ある高校の男子生徒 100 人を無作為に選んで身長を調査した。平均 170.0 cm 母標準偏差が 6 cm のとき、信頼度 95% の信頼区間を求めよ。



母比率の推定

母集団の中で、ある性質 A をもつものの割合を p とするとき、この p を ()

いう。また、抽出された標本の中で、性質 A をもつものの割合を () という。

標本比率から母比率を推定してみよう。

母比率 p の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出し、標本に含まれる性質 A をも

つものの個数を X とする。X の確率分布は二項分布 $B(n, p)$ であり、 n が十分大きいとき、

正規分布 $N(p, npq)$ で近似できる。 $q = 1 - p$ このとき、

$$P\left(-1.96 \sqrt{np(1-p)} \leq X - np \leq 1.96 \sqrt{np(1-p)}\right) = 0.95 \text{ が成り立つ。}$$

標本における比率 $\frac{X}{n}$ を p_0 とすれば、 n が十分大きいとき、 $p \approx p_0$ としてよいから

$$P\left(-1.96 \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leq p_0 - p \leq 1.96 \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) = 0.95$$

したがって、信頼度 95% の信頼区間は

$$p_0 - 1.96 \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \leq p \leq p_0 + 1.96 \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

問題 B 全国で 100 人を無作為に選んで、総理大臣の支持者を調べると 20 人であった。信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

発展問題 C 製品 1 個あたりの重さの母標準偏差が 2 g である。母平均を信頼度 95% で推定するとき、信頼区間の幅を 0.2 g 以下にするには何個調べればよいか。

数学B 不偏推定 ()年()組()番() 不偏分散

母平均 m , 母分散 S^2 の母集団から大きさ n の標本を抽出するとき , 標本の分散 S^2 の期待値を考える。

$$E(S^2) = E\left(\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{n}\right)$$

$$= E\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 - 2n(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\bar{X} + n\bar{X}^2}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) - 2E(X_1\bar{X} + X_2\bar{X} + \cdots + X_n\bar{X}) + E(\bar{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}E(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2) - \left(\right)$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - \{E(\bar{X}_i)\}^2 \text{ より } E(X_i^2) = \left(\right) = \left(\frac{^2}{n} + \right)$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \text{ より } E(\bar{X}^2) = \left(\right) = \left(\frac{^2}{n} + \right)$$

よって $E(S^2) = \left(\right) - \left(\right) = \left(\frac{^2}{n}\right)$

したがって , 標本の分散と母分散が違ふことが分かる。

標本の分散から推定した母集団の分散を , 不偏分散 \hat{S}^2 (シグマ ハット 2 乗) という。

$$\hat{S}^2 = \left(\frac{n}{n-1} S^2\right) = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

母平均の推定(標本の標準偏差による)

標本の大きさが十分大きいときは , 母標準偏差が分かれば標準正規分布を使えるが , 分からないときは , 母標準偏差 / 母分散の代わりに不偏標準偏差 / 不偏分散を使う。

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$$

で $N(0, 1)$ に近似し , 95%の信頼区間を考える。

$$P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{S}{\sqrt{n-1}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right) = 0.95$$

問題 A ある高校の男子生徒 50 人を無作為に選んで身長を調査した。平均 170.0 cm 標本の標準偏差が 3.0 cm のとき , 信頼度 95%の信頼区間を求めよ。

母平均の推定(少数の標本による)

標本の大きさ n が小さい場合は , 標本平均 \bar{X} の分布は正規分布とは考えられない。

そこで , $t = \frac{\bar{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}$ での分布を考え , これを (分布) という。

() を自由度という。もちろん n が大きくなると , 正規分布に近づく。

ある高校の男子生徒 10 人を無作為に選んで身長を調査した。平均 170.0 cm , 標本の標準偏差が 3.0 cm のとき , 信頼度 95%の信頼区間を求める。

信頼区間の確率が (0.) より , 両端の確率は (0.) , 片側の確率は (0.)



自由度 () , 確率 (0.) の t の値は () であるから

$$\left(\right) \times \frac{S}{\sqrt{n-1}} = \left(\right) \text{ より}$$

信頼度 95%の信頼区間は (cm) から (cm) になる。

t 分布の自由度 $n - 1$ での片側パーセント表 $P(t > \cdot)$



自由度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.100	3.078	1.886	1.638	1.533	1.476	1.440	1.415	1.397	1.383	1.372
0.050	6.314	2.920	2.353	2.132	2.015	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.025	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.278
0.010	31.821	6.965	4.541	3.747	3.365	3.143	2.998	2.896	2.821	2.764
0.005	63.657	9.925	5.841	4.604	4.032	3.707	3.499	3.355	3.250	3.169

自由度	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.100	1.363	1.356	1.350	1.345	1.341	1.337	1.333	1.330	1.328	1.325
0.050	1.796	1.782	1.771	1.761	1.753	1.746	1.740	1.734	1.729	1.725
0.025	2.201	2.179	2.160	2.145	2.131	2.120	2.110	2.101	2.093	2.086
0.010	2.718	2.681	2.650	2.624	2.602	2.583	2.567	2.552	2.539	2.528
0.005	3.106	3.055	3.012	2.977	2.947	2.921	2.898	2.878	2.861	2.845

自由度	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
0.100	1.323	1.321	1.319	1.318	1.316	1.315	1.314	1.313	1.311	1.282
0.050	1.721	1.717	1.714	1.711	1.708	1.706	1.703	1.701	1.699	1.645
0.025	2.080	2.074	2.069	2.064	2.060	2.056	2.052	2.048	2.045	1.960
0.010	2.518	2.508	2.500	2.492	2.479	2.479	2.473	2.467	2.462	2.326
0.005	2.831	2.819	2.807	2.797	2.779	2.779	2.771	2.763	2.756	2.576