

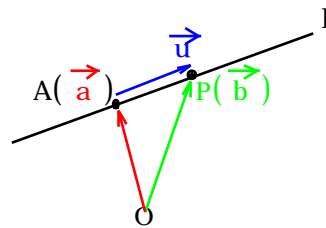
# 数学B ベクトル方程式 ( )年( )組( )番( )

平面上の点の位置は、位置ベクトルを利用して表すことができる。このことを利用して、直線や円などの図形をベクトルで表すことを考えてみよう。このときの図形の任意の点の位置ベクトルが表す関係式を( )という。

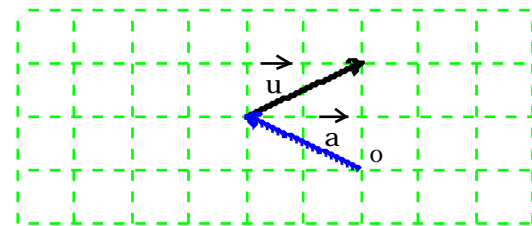
## 方向ベクトルと直線

点A(  $\vec{a}$  )を通り、  $\vec{0}$  でないベクトル  $\vec{u}$  に平行な直線を  $l$  とする。この直線  $l$  上の任意の点を  $P(\vec{p})$  とすると、  
 $\vec{AP} \parallel \vec{u}$  より、  $\vec{AP} = t \vec{u}$  となる実数  $t$  が存在する。

$\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a}$  であるから、  $\vec{p} - \vec{a} = t \vec{u}$   
 したがって、  $\vec{p} = \vec{a} + t \vec{u}$  となる。この  $\vec{u}$  を直線  $l$  の( )という。



問題A 次の図に  $t$  が、  $-2, -1, 0, 1, 2$  の値をとるとき点Pの位置を示せ。  
 $\vec{p} = \vec{a} + t \vec{u}$



## 直線の媒介変数表示

点A(  $\vec{a}$  )を通り、方向ベクトル  $\vec{u} = (a, b)$  に平行な直線のベクトル方程式を成分で表す。A(  $x_0, y_0$  ), P(  $x, y$  ) とすると、点A, Pの位置ベクトルは、原点Oを基準とすると、  
 $\vec{a} = (x_0, y_0)$ ,  $\vec{p} = (x, y)$  となる。  $\vec{p} = \vec{a} + t \vec{u}$  であるから、  
 $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) = (x_0 + ta, y_0 + tb)$

すなわち  $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases}$   
 を直線  $l$  の( )表示といい、 $t$  を媒介変数という。

から  $t$  を消去して整理すると、  $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$   
 $a \neq 0$  のとき、  $y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)$

問題B 点A(  $3, 2$  )を通り、方向ベクトルが  $\vec{u} = (1, 2)$  である直線を媒介変数表示せよ。  
 また、 $t$  を消去した式も表せ。

## 2点を通る直線

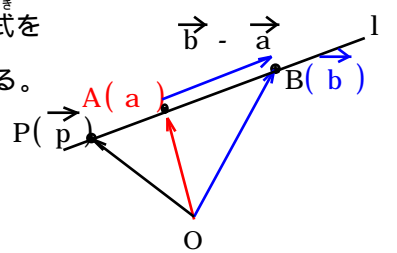
異なる2点A(  $\vec{a}$  ), B(  $\vec{b}$  )を通る直線  $l$  のベクトル方程式を求める。点Aを通り  $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$  が方向ベクトルである。

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

ここで、  $1 - t = s$  とおくと、

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{ただし、} s + t = 1$$

問題C 平行四辺形OABCにおいて、OAの中点をMとする。点A, Bの位置ベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  とするとき、次の直線のベクトル方程式を求めよ。



- (1) 直線 AB (2) 直線 BM (3) 直線 OC

## 法線ベクトルと直線

点A(  $\vec{a}$  )を通り、  $\vec{0}$  でないベクトル  $\vec{n}$  に垂直な直線  $l$  のベクトル方程式を求める。  $l$  上の任意の点を  $P(\vec{p})$  とする。

$$\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0 \quad \text{より} \quad \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

ここで、  $\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a}$  であるから

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$$

この式もベクトル方程式であり、  $\vec{n}$  を( )という。

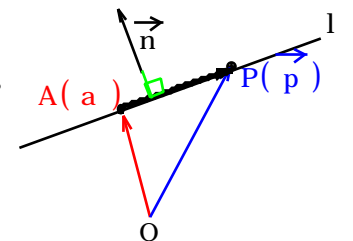
$$\vec{a} = (x_0, y_0), \vec{p} = (x, y), \vec{n} = (a, b) \text{ として成分で表すと、}$$

$$(a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

したがって、  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$  になる。

$$-ax_0 - by_0 = c \quad \text{とおくと、} \quad ax + by = c + ax_0 + by_0 \quad \text{となる。}$$

問題D 次の点A(  $2, 3$  )を通り、法線ベクトルが  $\vec{n} = (1, 2)$  である直線の方程式を求めよ。



数学B 平面上の点の存在範囲 ( )年( )組( )番( )

円のベクトル方程式  
点C(  $\vec{c}$  )を中心とする半径rの円のベクトル方程式を求める。

円周上の任意の点をP(  $\vec{p}$  )をとすると、  
 $|\vec{CP}| =$  よって  $|\vec{p} - \vec{c}| =$

この式が、( 円の )になる

$\vec{c} = (a, b)$ ,  $\vec{p} = (x, y)$ とし、成分表示すると

$\vec{p} - \vec{c} = ($  ,  $)$ であるから

$$\sqrt{( )^2 + ( )^2} =$$

両辺を2乗すると、

$$( )^2 + ( )^2 =$$

空間ベクトルの場合も同様に考え、球のベクトル方程式は  $|\vec{p} - \vec{c}| =$  になる。

中心が(a, b, c)、半径rの球面の方程式は、

$$(x - )^2 + (y - )^2 + (z - )^2 = \text{ になる。}$$

問題A 平面上の点A(  $\vec{a}$  )と任意の点P(  $\vec{p}$  )に対し、次のベクトル方程式で表される

円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(1)  $|\vec{p} - \vec{a}| = 4$  (2)  $|2\vec{p} - \vec{a}| = 2$

2点A(  $\vec{a}$  ), B(  $\vec{b}$  )を直径とする円のベクトル方程式を考える。

円周上の任意の点をP(  $\vec{p}$  )をとすると、PがA, Bと異なる点であるとき、円周角の定理より、直径の円周角は( )になる。

したがって、 $\vec{AP} \perp \vec{BP}$ になる。

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = \text{ よって、 } ( \vec{p} ) ( \vec{p} ) =$$

この方程式は点PがA, Bと重なるときも、成り立つ。

平面上の点の存在範囲

異なる2点A(  $\vec{a}$  ), B(  $\vec{b}$  )を通るベクトル方程式は  $\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$  である。

このとき、 $0 \leq t \leq 1$ であれば、Pは線分AB上にある。

ベクトル方程式  $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  において、 $s \geq 0, t \geq 0, s + t = 1$  であれば、  
において、Pは( )上にある。

ベクトル方程式  $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  において、 $s \geq 0, t \geq 0, s + t = 2$  のときの、点Pの存在範囲を考える。 $s + t = 2$ の両辺を2で割ると、 $\frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1$  になる。

$$s' = \frac{s}{2}, t' = \frac{t}{2} \text{ とおくと、 } s' \geq 0, t' \geq 0, s' + t' = 1 \text{ になる。}$$

$$\vec{p} = (s')\vec{a} + (t')\vec{b} = s'(\vec{a}) + t'(\vec{b})$$

したがって、A'( ), B'( )となる線分A'B'上にある。

OABにおいて、 $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ ,  $s \geq 0, t \geq 0, s + t = k$  とすると、点PはOA, OBをk倍したA', B'でつくる線分A'B'上にある。ABとA'B'は平行

したがって、 $0 \leq k \leq 1$  のとき、点PはOABの周および内部にある。

点O, A, Bにおいて、 $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ ,  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$  のとき、点Pの存在範囲を考える。点Cの位置ベクトルは  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$  とする。

$0 \leq s \leq 1$  に対して、 $\vec{OA'} = s\vec{OA}$  となる点A'をとると、 $\vec{OP} = \vec{OA'} + t\vec{OB}$  になる。

点Pは線分OBに平行な線分A'C'上にある。

ここでsが0から1まで変化すると、点A'は、辺OA上をOからAまで動き、点C'は辺BC上をBからCまで動く。  
したがって、点Pが平行四辺形OACBの周および内部にある。

問題B OABにおいて、 $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ ,  $s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 2$  のとき、  
点Pの存在範囲を求めよ。

