

数学B いろいろな数列の和 ()年()組()番()

数列の和と一般項

数列の和と一般項の関係を利用して，一般項を求めることができる。

数列{ a_n }の初項から第 n 項までの和を S_n とすると， $n \geq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_{n-1} = (\quad)$$

したがって， $S_n - S_{n-1} = (\quad)$ になる。また， $S_1 = (\quad)$ より，次の事が分かる。

$$a_1 = (\quad), \quad n \geq 2 \text{ のとき } a_n = (\quad)$$

問題 A 数列{ a_n }の初項から第 n 項までの和 S_n が， $S_n = 2n^2 - n$ で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。

$$n = 1 \text{ のとき } a_1 = S_1 = \quad \quad \quad n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - n - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} = \quad$$

ここで， $a_n = (\quad)$ は $n = 1$ のときも成り立つから

$$a_n = (\quad)$$

問題 B 数列{ a_n }の初項から第 n 項までの和 S_n が， $S_n = n^2$ で表されるとき，一般項 a_n を求めよ。

階差数列

数列{ a_n }があるとき， $b_n = a_{n+1} - a_n$ として得られる数列{ b_n }をもとの数列{ a_n }の () という。階差数列から，一般項を求めることを考える。

数列{ a_n } = 1, 4, 9, 16, 25, ... の各項から直前の項の差を作ると，3, 5, 7, 9, ... になる。これは，(初項，公差の等差数列) になる。 $b_n =$ 数列{ a_n } を先の等差数列をもとに考える。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + 3 = 1 + 3, \quad a_3 = a_2 + 5 = 1 + 3 + 5, \quad a_4 = a_3 + (\quad) =$$

この様にして， $n \geq 2$ のとき，第 n 項 a_n は

$$a_n = 1 + \{3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)\} = 1 + \frac{(n-1)\{ \text{初項} + (\text{末項}) \}}{2} =$$

$$a_1 = 1 \text{ だから，} n = 1 \text{ のときも成り立つ。よって，} a_n =$$

階差数列と一般項の公式

数列{ a_n }の階差数列を{ b_n }とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき，} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n = 1 \text{ のときも調べる})$$

問題 C 次の数列の階差数列はどんな数列か？

- (1) 1, 2, 5, 10, 12, ... (2) 1, 3, 7, 15, 31, ...

$$(\text{初項}, \text{公差の等差数列})$$

問題 D 数列 0, 2, 6, 12, 20, ... の一般項 a_n を求めよ。

この数列{ a_n }の階差数列を{ b_n }とすると b_n は () となる。

これは(初項，公差の等差数列) になるから， $b_n =$

よって， $n \geq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \quad =$$

この式は $n = 1$ のときも成り立つ。よって， $a_n = n(n-1)$

数学B いろいろな数列の和 ()年()組()番()

分数の数列の和

分数式 $\frac{1}{k(k+1)}$ を $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ の形 にすることを部分分数に分解するという。

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)}{k(k+1)} + \frac{bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

係数を比較して $a+b = ()$, $a = ()$ よって, $a = ()$, $b = ()$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \text{ になる。このことを利用して, 数列の和を求め。}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right) \end{aligned}$$

問題 A 恒等式 $\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$ を利用して

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \text{ を求めよ。}$$

等差 × 等比の数列の和

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 \text{ を求めてみよう。}$$

$$\begin{array}{rcl} S & = & (\quad + \quad + \quad + \quad + \quad) \\ -) 3S & = & (\quad + \quad + \quad + \quad + \quad) \\ \hline - 2S & = & (\quad + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad) \end{array}$$

$$\text{よって } -2S = \left(\frac{5}{2} \times 3^5 - \frac{3^5 - 1}{4} \right) - (\quad)$$

$$\text{したがって } S = \frac{5}{2} \times 3^5 - \frac{3^5 - 1}{4} = 547$$

群数列

数列 $\{a_n\}$ を何項かの群に分けたものを () という。区切りを " | " とする。

例 $1 \mid 2, 3 \mid 4, 5, 6 \mid 7, 8, 9, 10 \mid 11, 12, 13, 14, 15 \mid \cdots$
() を第 n 群に入る数の個数が (個) になるように分けた群数列である。

例 $3, 6 \mid 9, 12, 15, 18 \mid 21, 24, 27, 30, 33, 36 \mid \cdots$
3 の倍数を第 n 群に入る数の個数が (個) になるように分けた群数列である。

問題 B 正の偶数を第 n 群に n 個入るように分けた群数列について答えよ。

(1) この群数列を第 4 群まで書きなさい。
 $() \mid () \mid () \mid () \mid \cdots$

(2) 第 n 群の末項までに入る数の個数を求めよ。
 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = ()$

(3) 第 n 群の最初の数は何番目の数になるかを求めよ。
第 $(n-1)$ 群の末項の次の数であるから $(\quad + 1)$

(4) 第 n 群の最初の数を求めよ。

(5) 第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

問題 C 正の奇数の数列を第 n 群に n 個入るように分けた群列の第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。