

数学A ユーグリッドの互除法 ()年()組()番()

ユーグリッドの互除法

598 と 391 の最大公約数を求めてみよう。598 は()の倍数である。598, 391 とともに()の倍数, ()の倍数でもない。598 が 7 の倍数であるか調べると, $59 - 2 \times 8 = 33$ になり, 7 の倍数でない。このように, 大きな数を素因数分解するのは簡単ではない。

素因数分解せずに, 最大公約数を求めるのに, 次の定理を用いる。

自然数 a, b において, a を b で割ったときの余りを r とすると,

a と b の最大公約数は, b と r の最大公約数に等しい。

$a = b \times q + r$ 最大公約数が等しい

$$\begin{aligned} 598 &= 391 \times 1 + 207 && 598 \text{ と } 391 \text{ の最大公約数} \\ 391 &= 207 \times 1 + 184 && = 391 \text{ と } 207 \text{ の最大公約数} \\ 207 &= 184 \times 1 + 23 && = 207 \text{ と } 184 \text{ の最大公約数} \\ 184 &= 23 \times 8 + 0 && = 184 \text{ と } 23 \text{ の最大公約数} = 23 \end{aligned}$$

よって, 598 と 391 の最大公約数は()になる。

問題 A 次の数の最大公約数を求めよ。

(1) 147, 126 (2) 315, 91

互除法の活用

ユーグリッドの互除法を用いて, 144 と 35 の最大公約数を求める。

$$\begin{aligned} 144 &= 35 \times 4 + 4 && 4 = 144 - 35 \times 4 \cdots \\ 35 &= 4 \times 8 + 3 && 3 = 35 - 4 \times 8 \cdots \\ 4 &= 3 \times 1 + 1 && 1 = 4 - 3 \times 1 \cdots \\ 3 &= 1 \times 3 + 0 \end{aligned}$$

よって, 144 と 35 の最大公約数は()になる。

右側の式を下から戻すと

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \times 1 = 4 - () \times 1 \text{ より} \\ &= 4 \times 9 + 35 \times (- 1) = () \times 9 + 35 \times (- 1) \text{ より} \\ &= 144 \times 9 + 35 \times () \end{aligned}$$

互除法の計算を利用すると, 整数 a, b の最大公約数を a, b の式で表すことができる。

a, b が互いに素であるとき, $a x + b y = 1$ となる整数 x, y が存在する。

両辺に c をかけると, $a () + b () = c$ となる。よって, 次のことがいえる。

「a, b が互いに素であるとき, $a x + b y = c$ となる整数 x, y が存在する。」

問題 B ユーグリッドの互除法を用いて, 144 と 126 の最大公約数 d を求めよ。

また, d を 144 の整数倍と 126 の整数倍の和として表せ。

数学A 1次不定方程式 ()年()組()番()

1次不定方程式

a, b, cを整数の定数で, a 0, b 0とする。x, y の1次方程式「 $ax + by = c$ 」を成り立たせる整数 x, y の組を, この方程式の()という。この方程式の整数解を求めることを 1次不定方程式を()という。

方程式 $x - 2y = 0$ の解を $x = 0, 1, 2,$

3, 4, ... と変えながら y の値を求める。

方程式を満たす整数解は (,),

(,), (,) など無数である。

x	0	1	2	3	4	...
y		—		—		...

問題 A 方程式 $x + 2y = 1$ の解の表を作りなさい。

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y									

1次不定方程式 $ax + by = 0$ の解法

$3x - 2y = 0$ の解を求める。移項すると ($3x =$) になる。

3x は(の倍数)である。2y は(の倍数) である。

したがって, 3x は(の倍数)であり, (の倍数)であるので, (の倍数)になる。

整数 k を用いると, $3x = (k), 2y = (k)$ と表すことができる。

よって, $3x - 2y = 0$ のすべての解は ($x = k, y = k$) (k は整数) になる。

問題 B 次の不定方程式のすべての解を求めなさい。

- (1) $4x - 7y = 0$ (2) $3x + 5y = 0$

1次不定方程式 $ax + by = 1$ の解法

$4x - 3y = 1$ の解を求める。($x = 1, y =$)が整数解の一つになる。 特殊解

よって, ($4 \times - 3 \times = 1$) になる。

元の式から引くと $4(x -) - 3(y -) = 0$ になる。

$4(x -) = 3(y -)$ となり, 3 と 2 は互いに素であるから, 整数 k を用いると

$4(x -) = (k), 3(y -) = (k)$ と表すことができる。

すべての解は($x = k, y = k$) (k は整数) になる。 一般解

1次不定方程式 $ax + by = c$ の解法

$3x - y = 2$ の解を求めるには, $3x - y = 1$ の整数解の一つを求める。

$3x - y = 1$ は($x = 1, y =$)が整数解の一つになる。

よって, ($3 \times - 1 \times = 1$) 両辺を 2 倍すると($3 \times - 1 \times = 2$)

この式を $3x - y = 2$ から引くと, $3(x -) - (y -) = 0$ になる。

$3(x -) = (y -)$ となり, 3 と 1 は互いに素であるから, 整数 k を用いると

$3(x -) = (k), (y -) = (k)$ と表すことができる。

すべての解は($x = k, y = k$) (k は整数) になる。

問題 C 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

- (1) $5x + 2y = 1$ (2) $4x + 7y = 5$