数学A　命題と条件　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

命題と条件

数学では，文字や記号を使って，事柄を簡潔に表す。ある判断を述べた文や式の中で，正しい(　　　)，正しくない(　　　)が，はっきり決められるものを(　　　　　)という。

「$x = 1$ ならば $x^2 = 1$」は真の命題である。

「$x^2 = 1$ ならば $x = 1$」は偽の命題である。$x^2 = 1$ は $x = -1$ の場合もある。

偽であることを示すには，成り立たない例(反例)を示す。

「p ならば q である」を「$p \Rightarrow q$」で表す。この p を(　　　　)，q を(　　　　)という。

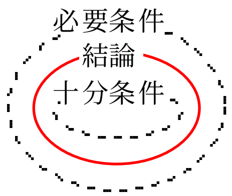
「$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$」の仮定は「　　　　　」，結論は「　　　　　」になる。

文や式中の文字を変えると，真偽が変わるものを(　　　　)という。

問題 A　次の命題の真偽を調べよ。偽なら反例を示せ。

(1) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$　　(2) $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$　　(3) $x > y \Rightarrow x^2 > y^2$

必要条件と十分条件



p が成り立つときには，必ず q が成り立つとき，

「q は p の(　　　　条件)である」

「p は q の(　　　　条件)である」という。

「$p \Rightarrow q$」と「$q \Rightarrow p$」がともに真のとき「$p \Leftrightarrow q$」と表し，必要十分条件になる。

このとき，p と q は同値であるという。

・「$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$」の命題は真であるから，

「$x = 2$ は $x^2 = 4$ の十分条件である」「$x^2 = 4$ は $x = 2$ の必要条件である」

問題 B　次の □ に「十分」，「必要」，「必要十分」のいずれかを記入しなさい。

(1) $x^2 + y^2 = 0$ は $x = y = 0$ であるための □ 条件である。

(2) $x > 3$ は $x^2 > 9$ であるための □ 条件である。

(3) $xy = 0$ は $x = 0$ であるための □ 条件である。

いろいろな条件

「p でない」という条件を p の否定といい，$\overline{p}$ と表す。ド·モルガンの法則より

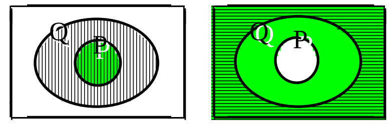
「$\overline{p\ かつ\ q}$」$\Leftrightarrow$「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」，「$\overline{p\ または\ q}$」$\Leftrightarrow$「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」が成り立つ。

「$p \Rightarrow q$」に対し「$q \Rightarrow p$」を「$p \Rightarrow q$」の逆という。

対偶

「$p \Rightarrow q$」に対し，「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」をその裏，「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」をその(　　　　)という。

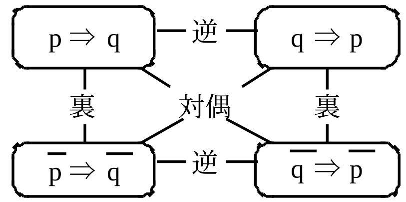
集合で対偶を考える。p，q を満たすものの集合を P,Q とする。



「$p \Rightarrow q$」が真であるとき，P は Q に含まれる。

このとき，$\overline{Q}$ に含まれるものは $\overline{P}$ に含まれる。

したがって，「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」も正しい。



問題 C　次の命題の対偶をつくれ。

(1) $x = 3$ ならば $x^2 = 9$ である。

(2) 人間は生物である。

対偶による証明

「整数 n の 2 乗が偶数のとき，n が偶数であることを証明する」

このままでは，$n^2 = 2k$ から，$n = 2k'$ を示す必要がある。⇒不可能？

対偶「n が奇数ならば，n^2 が奇数になる」を証明する。

n が奇数ならば，ある整数 k を用いて，$n = 2k + 1$ と表せる。したがって，

$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\qquad\qquad) + 1$　となり，n^2 が奇数になる。

対偶が証明されたので，もとの命題も真である。

背理法による証明

ある命題が正しいことを証明するとき，「その命題が成り立たないと矛盾が生じる。したがって，その命題は成り立つはずである。」とする。この証明法を背理法という。

「$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明する」

$\sqrt{2}$ が有理数であるとすれば，正の整数 m,n を用いて $\sqrt{2} = \dfrac{n}{m}$ と表すことができる。

右辺は既約分数である。分母をはらって，両辺を 2 乗すると，$2m^2 =$(　　　)になる。

左辺は偶数であるから，右辺(n^2 も　　　)になる。したがって，(n も　　　)になり，

$n = 2k$ と表せる。($2m^2 =$　　　)に代入すると，($2m^2 =$　　　)，($m^2 =$　　　)になる。

したがって，(m も　　　　)になる。これは，$\dfrac{n}{m}$ が既約分数である仮定に反する。

ゆえに，$\sqrt{2}$ が有理数ではなく，無理数である。