

数学Ⅲ 定積分と微分の関係 ① 課題

()年()組()番()

1. 次の文章の を埋めて、説明を完成せよ。

a を定数とすると、定積分 $\int_a^x f(t) dt$ を考える。

x によって値が定まるので の関数である。

$F'(t) = f(t)$ とすると

$$\int_a^x f(t) dt = F(\text{ }) - F(\text{ })$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = F'(\text{ }) - \text{ } = \text{ }(x)$$

2. 次の関数の導関数を求めよ。

例題① $G(x) = \int_{\pi}^x \sin t dt$

$$G'(x) = \sin x$$

問題① $G(x) = \int_0^x \cos t dt$

例題② $G(x) = \int_1^x t e^t dt$

$$G'(x) = x e^x$$

問題② $G(x) = \int_e^x t \log t dt \quad (x > 0)$

例題③ $G(x) = \int_0^x x \sin t dt = x \int_0^x \sin t dt$

$$G'(x) = (x)' \int_0^x \sin t dt + x \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt$$

$$= \left[-\cos t \right]_0^x + x \sin x$$

$$= -\cos x + \cos 0 + x \sin x$$

$$= x \sin x - \cos x + 1$$

問題③ $G(x) = \int_0^x x \cos t dt = x \int_0^x \cos t dt$

3. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

例題 $f(x) = \cos x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \text{ は定数なので } a \text{ とおくと}$$

$$f(x) = \cos x + a \text{ とおける。}$$

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + a) dt = \left[\sin t + at \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{2} + a \times \frac{\pi}{2} \right) - (\sin 0 + 0)$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2} a$$

$$a - \frac{\pi}{2} a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{1 - \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2 - \pi}$$

$$f(x) = \cos x + \frac{2}{2 - \pi}$$

問題 $f(x) = \sin x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$

数学Ⅲ ていせきぶん ひぶん かんけい 定積分と微分の関係 ② かだい 課題

()年()組()番()

1. 次の文章の を埋めて、説明を完成せよ。

$\int f(t) dt = F(t) + C$ とすると

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = [F(t)]_{h(x)}^{g(x)}$$

$$= F(\text{ }) - F(\text{ })$$

りょうへん 両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = \{ F(\text{ }) - F(\text{ }) \}'$$

$$= F'(\text{ }) - F'(\text{ })$$

$$= f(\text{ }) - f(\text{ })$$

2. 次の関数の導関数を求めよ。

れいだい 例題① $G(x) = \int_0^x \cos t dt$

$$G'(x) = \cos x$$

もんだい 問題① $G(x) = \int_0^x \log t dt$

れいだい 例題② $G(x) = \int_1^{2x} e^t dt$

$$G'(x) = e^{2x} \times (2x)' = 2e^{2x}$$

もんだい 問題② $G(x) = \int_0^{3x} t e^t dt$

れいだい 例題③ $G(x) = \int_1^x x \log t dt = x \int_1^x \log t dt$

$$G'(x) = (x)' \int_1^x \log t dt + x \frac{d}{dx} \int_1^x \log t dt$$

$$= [t \log t - t]_1^x + x \times \log x$$

$$= (x \log x - x) - (0 - 1) + x \log x$$

$$= 2x \log x - x + 1$$

もんだい 問題③ $G(x) = \int_0^x x e^t dt$

3. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

れいだい 例題 $f(x) = x + \int_0^1 f(t) e^{-t} dt$

$\int_0^1 f(t) e^{-t} dt$ は定数なので a とおくと

$$f(x) = x + a$$
 とおける。
$$a = \int_0^1 (t + a) e^{-t} dt = \int_0^1 (t + a) (-e^{-t})' dt$$

$$= [(t + a) (-e^{-t})]_0^1 - \int_0^1 (t + a)' (-e^{-t}) dt$$

$$= -(1 + a) e^{-1} + a + \int_0^1 e^{-t} dt$$

$$= -(1 + a) e^{-1} + a - e^{-1} + 1$$

$$= a(1 - e^{-1}) - 2e^{-1} + 1$$

よって $a = \frac{-2e^{-1} + 1}{e^{-1}} = e - 2$

ゆえに $f(x) = x + e - 2$

もんだい 問題 $f(x) = x + \int_0^1 f(t) e^t dt$

数学Ⅲ ていせきぶん ひぶん かんけい 定積分と微分の関係 ③ かだい 課題

()年()組()番()

1. 次の文章の を埋めて、説明を完成せよ。

$$\int f(t) dt = F(t) + C \text{ とすると}$$

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = [F(t)]_{h(x)}^{g(x)}$$

$$= F(\text{ }) - F(\text{ })$$

りょうへん 両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = \{ F(\text{ }) - F(\text{ }) \}'$$

$$= F'(\text{ }) - F'(\text{ })$$

$$= f(\text{ }) - f(\text{ })$$

2. 次の関数の導関数を求めよ。

れいだい 例題① $G(x) = \int_1^x \log t dt$
 $G'(x) = \log x$

もんだい 問題① $G(x) = \int_0^x e^t dt$

れいだい 例題② $G(x) = \int_0^{2x} \cos t dt$
 $G'(x) = \cos 2x \times (2x)' = 2 \cos 2x$

もんだい 問題② $G(x) = \int_0^{3x} \sin t dt$

れいだい 例題③ $G(x) = \int_0^x x \cos t dt = x \int_0^x \cos t dt$

$$G'(x) = (x)' \int_0^x \cos t dt + x \frac{d}{dx} \int_0^x \cos t dt$$

$$= \left[\sin t \right]_0^x + x \times \cos x$$

$$= (\sin x) - (\sin 0) + x \cos x$$

$$= x \cos x + \sin x$$

もんだい 問題③ $G(x) = \int_0^x x \sin t dt$

3. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

れいだい 例題 $f(x) = x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt$ は定数なので a とおくと

$$f(x) = x - a \text{ とおける。}$$

$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - a) \sin t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t - a) (-\cos t)' dt$$

$$= \left[(t - a)(-\cos t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t) dt$$

$$= \left[(t - a)(-\cos t) + \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[(t - a)(-\cos t) + \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - a = a \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2}$$

もんだい 問題 $f(x) = x + \int_0^{\pi} f(t) \cos t dt$