数学Ⅲ　部分積分 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の不定積分を求めよ。

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

例題①　$\int x\sin x\,dx = \int x(-\cos x)'\,dx$

$= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x)\,dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

問題①　$\int x\cos x\,dx$

例題②　$\int x^2\cos x\,dx = \int x^2(\sin x)'\,dx$

$= x^2\sin x - \int (x^2)'\sin x\,dx$

$= x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

問題②　$\int x^2\sin x\,dx$

例題③　$\int \log(x+1)\,dx = \int \log(x+1)\times(x+1)'\,dx$

$= (x+1)\log(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}\,dx$

$= (x+1)\log(x+1) - \int dx$

$= (x+1)\log(x+1) - x + C$

問題③　$\int \log(x+2)\,dx$

2. 次の不定積分を求めよ。

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}$$

例題①　$\int \cos^2 x\,dx$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

問題①　$\int \sin^2 x\,dx$

例題②　$\int \sin^2 3x\,dx$

$= \int \frac{1-\cos 6x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$

問題②　$\int \cos^2 4x\,dx$

例題③　$\int \sin 2x\cos x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}\left\{\sin(2x+x) + \sin(2x-x)\right\}dx$

$= \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x - \cos x\right) + C$

$= -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C$

問題③　$\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

数学Ⅲ　部分積分 ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の不定積分を求めよ。

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

例題①　$\int x e^{-x}\,dx = \int x(-e^{-x})'\,dx$

$= x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x})\,dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$

問題①　$\int x e^{x}\,dx$

例題②　$\int x^2 e^{-x}\,dx = \int x^2(-e^{-x})'\,dx$

$= -x^2 e^{-x} - \int (x^2)'(-e^{-x})\,dx$

$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx$

$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

問題②　$\int x^2 e^{x}\,dx$

例題③　$\int \log x\,dx = \int \log x \times (x)'\,dx$

$= x\log x - \int (\log x)'\,x\,dx$

$= x\log x - \int dx$

$= x\log x - x + C$

問題③　$\int (\log x)^2\,dx$

2. 次の不定積分を求めよ。

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

例題①　$\int \cos^2 3x\,dx$

$= \int \frac{1+\cos 6x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$

問題①　$\int \sin^2 4x\,dx$

例題②　$\int \cos 3x \cos x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}\{\cos(3x+x) + \cos(3x-x)\}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

問題②　$\int \cos 3x \cos 2x\,dx$

問題③　$\int \sin 2x \sin x\,dx$

数学Ⅲ　部分積分 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の三角関数を微分せよ。

例題　$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

問題　$\tan x$

2. 次の不定積分を求めよ。　$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

例題　$\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$

$$\int \frac{x\, dx}{\sin^2 x} = \int x \left(-\frac{1}{\tan x}\right)' dx$$

$$= -\frac{x}{\tan x} - \int x' \left(-\frac{1}{\tan x}\right) dx$$

$$= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}\, dx$$

$$= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\, dx$$

$$= -\frac{x}{\tan x} + \log|\sin x| + C$$

問題　$\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$

3. 次の不定積分を求めよ。　$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

例題①　$\displaystyle\int x^2 \log x\, dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \log x\, dx$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}(\log x)'\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C$$

問題①　$\displaystyle\int x \log x\, dx$

例題②　$\displaystyle\int (x+1)\, e^{-x}\, dx = \int (x+1)\left(-e^{-x}\right)' dx$

$$= -(x+1)\, e^{-x} - \int (x+1)'\left(-e^{-x}\right) dx$$

$$= -(x+1)\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx$$

$$= -(x+1)\, e^{-x} - e^{x} + C = -(x+2)\, e^{-x} + C$$

問題②　$\displaystyle\int x\, e^{x}\, dx$

問題③　$\displaystyle\int x^2\, e^{x}\, dx$

数学Ⅲ　部分積分(対数関数・指数関数)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の不定積分を求めよ。

例題① $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$　※置換積分

$\log x = t$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$,　$\dfrac{1}{x}dx = dt$

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

問題① $\displaystyle\int \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$　※置換積分

例題② $\displaystyle\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx$

$$= x\log x - \int x(\log x)'\,dx$$

$$= x\log x - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= x\log x - \int dx$$

$$= x\log x - x + C$$

問題② $\displaystyle\int \log(x+3)\,dx = \int (x+3)'\log(x+3)\,dx$

問題③ $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = \int (x)'(\log x)^2\,dx$

問題④ $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題① $\displaystyle\int x e^{-x^2}\,dx$　※置換積分

$u = -x^2$ とおくと　$\dfrac{du}{dx} = -2x$,　$du = -2x\,dx$

$$\int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^u\,du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

問題① $\displaystyle\int x e^{x^2}\,dx$　※置換積分

例題② $\displaystyle\int x e^{3x}\,dx = \int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'dx$

$$= \frac{1}{3}x e^{3x} - \int (x)'\frac{1}{3}e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

問題② $\displaystyle\int x e^{-x}\,dx = \int x\left(-e^{-x}\right)'dx$

問題③ $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx = \int x^2\left(-e^{-x}\right)'dx$

数学Ⅲ　部分積分(三角関数)　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\int x\sin 2x\,dx = \int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$

$= x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int (x)'\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$

$= x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

問題①　$\int x\sin 3x\,dx$

例題②　$\int x\cos 4x\,dx = \int x\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)'dx$

$= x\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right) - \int (x)'\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)dx$

$= x\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right) - \int \frac{1}{4}\cos 4x\,dx$

$= \frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$

問題②　$\int x\cos 2x\,dx$

例題③　$\int x^2\sin 4x\,dx = \int x^2\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)'dx$

$= x^2\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) - \int (x^2)'\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)dx$

$= x^2\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + \frac{1}{2}\int x\cos 4x\,dx$

$= -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\sin 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C$

例題③　$\int x^2\cos 2x\,dx$

2. 次の関数を微分せよ。

例題①　$y = \log|\sin x|$

$y' = \frac{(\sin x)'}{(\sin x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

問題①　$y = -\log|\cos x|$

例題②　$y = \frac{1}{\tan x}$

$y' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

問題②　$y = \tan x$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題　$\int \frac{x}{\sin^2 x}dx = \int x\left(-\frac{1}{\tan x}\right)'dx$

$= -\frac{x}{\tan x} - \int (x)'\left(-\frac{1}{\tan x}\right)'dx$

$= -\frac{x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}dx$

$= -\frac{x}{\tan x} + \log|\sin x| + C$

問題　$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int x(\tan x)'dx$

数学Ⅲ　部分積分(置換→部分) 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\int x\sin(x+1)\,dx$

$$\int x\sin(x+1)\,dx = \int x\{-\cos(x+1)\}'dx$$
$$= -x\cos(x+1) - \int (x)'\{-\cos(x+1)\}\,dx$$
$$= -x\cos(x+1) + \int \cos(x+1)\,dx$$
$$= -x\cos(x+1) + \sin(x+1) + C$$

問題①　$\int x\cos(x+1)\,dx$

例題②　$\int \cos\sqrt{x}\,dx$

$t=\sqrt{x}$ とおくと，$x=t^2$，$\dfrac{dx}{dt}=2t$，$dx=2t\,dt$

$$\int \cos\sqrt{x}\,dx = \int 2t\cos t\,dt = \int 2t(\sin t)'dt$$
$$= 2t\sin t - \int (2t)'\sin t\,dt$$
$$= 2t\sin t - 2\int \sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t + C$$
$$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$$

問題②　$\int \sin\sqrt{x}\,dx$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

$t=\sqrt{x}$ とおくと，$x=t^2$，$\dfrac{dx}{dt}=2t$，$dx=2t\,dt$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int 2te^{t}dt = \int 2t(e^{t})'dt$$
$$= 2te^{t} - \int (2t)'e^{t}\,dt$$
$$= 2te^{t} - 2\int e^{t}dt = 2te^{t} - 2e^{t} + C$$
$$= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$$

問題①　$\int e^{-\sqrt{x}}\,dx$

問題②　$\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(部分分数) ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

例題①　$\dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}$

$$2x^2+3x+1$$
$$=(x+2)(2x-1)+3$$
$$\frac{2x^2+3x+1}{x+2}=(2x-1)+\frac{3}{x+2}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \\ \hline x+2 & 2x^2+3x+1 \\ & 2x^2+4x \\ \hline & \quad -x+1 \\ & \quad -x-2 \\ \hline & \qquad 3 \end{array}$$

問題①　$\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$

例題②　$\dfrac{2x+1}{x^3+2x^2+x}$

$$\frac{2x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{2x+1}{x(x+1)^2}$$
$$=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$
$$\frac{a(x^2+2x+1)+b(x^2+x)+cx}{x(x+1)^2}$$

$a+b=0$, $2a+b+c=2$, $a=1$ より

$a=1$, $b=-1$, $c=1$ になり

$$\frac{2x+1}{x^3+2x^2+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

問題②　$\dfrac{2x+1}{x^3+2x^2}$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2+3x+1}{x+2}dx$

$$=\int\left(2x-1+\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=x^2-x+3\log|x+2|+C$$

問題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2-3x-1}{x-2}dx$

例題②　$\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^3+2x^2+x}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$
$$=\log|x|-\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$$

問題②　$\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^3+2x^2}dx$

例題③　$\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\log|x+1|-\log|x+2|+C$$

問題③　$\displaystyle\int\frac{1}{(x+2)(x+3)}dx$

問題④　$\displaystyle\int\frac{2}{x(x+2)}dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(部分分数) ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

例題①　$\dfrac{2x^2+5x-1}{x+3}$

$$2x^2+5x-1$$
$$=(x+3)(2x-1)+2$$
$$\frac{2x^2+5x-1}{x+3}=(2x-1)+\frac{2}{x+3}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x-1 \\ \hline x+3 & 2x^2+5x-1 \\ & 2x^2+6x \\ \hline & \quad -x-1 \\ & \quad -x-3 \\ \hline & \qquad\quad 2 \end{array}$$

問題①　$\dfrac{2x^2+4x+2}{x+2}$

例題②　$\dfrac{1}{x^3+x^2}$

$$\frac{1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$$

$$a=\frac{1}{x^2(x+1)}\times x^2\Big|_{x=0}=\frac{1}{(0+1)}=1$$

$$c=\frac{1}{x^2(x+1)}\times(x+1)\Big|_{x=-1}=\frac{1}{(-1)^2}=1$$

$x=1$ のとき,

$$\frac{1}{1^3+1^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{b}{1}+\frac{1}{1+1}\quad \text{より } b=-1$$

$$\frac{1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$$

問題②　$\dfrac{4}{x^3+2x^2}$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2+5x-1}{x+3}dx$

$$=\int\left(2x-1+\frac{2}{x+3}\right)dx$$
$$=x^2-x+2\log|x+3|+C$$

問題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2+4x+2}{x+2}dx$

例題②　$\displaystyle\int\frac{1}{x^3+x^2}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{x}-\log|x|+\log|x+1|+C$$

問題②　$\displaystyle\int\frac{4}{x^3+2x^2}dx$

例題③　$\displaystyle\int\frac{1}{(x+3)(x+4)}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)dx$$
$$=\log|x+3|-\log|x+4|+C$$

問題③　$\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)}dx$

問題④　$\displaystyle\int\frac{3}{x(x+3)}dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(部分分数) ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

例題①　$\dfrac{7x+8}{x^2+3x+2}$

$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2}=\frac{7x+8}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$$

$$a=\frac{7x+8}{(x+1)(x+2)}\times(x+1)\Big|_{x=-1}=\frac{7(-1)+8}{(-1+2)}=1$$

$$b=\frac{7x+8}{(x+1)(x+2)}\times(x+2)\Big|_{x=-2}=\frac{7(-2)+8}{(-2+1)}=6$$

$$\frac{7x+8}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}+\frac{6}{x+2}$$

問題①　$\dfrac{2x+1}{x^2-x}$

例題②　$\dfrac{x^3+2}{x^2+3x+2}$

$$x^3+2$$

$$=(x-3)(x^2+3x+2)+7x+8$$

$$\begin{array}{r|l} & x\ -3 \\ \hline x^2+3x+2 & x^3\qquad\qquad +2 \\ & x^3+3x^2+2x \\ \hline & -3x^2-2x+2 \\ & -3x^2-9x-6 \\ \hline & 7x+8 \end{array}$$

$$\frac{x^3+2}{x^2+3x+2}=x-3+\frac{7x+8}{x^2+3x+2}$$

$$=x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{6}{x+2}$$

例題②　$\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2-x}$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\displaystyle\int\frac{x^3+2}{x^2+3x+2}dx$

$$=\int\left(x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{6}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-3x+2\log|x+1|+6\log|x+2|+C$$

問題①　$\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+1}{x^2-x}dx$

問題②　$\displaystyle\int\frac{2x^3+2x^2+6}{x^2+2x}dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(部分分数) ④ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

例題①　$\dfrac{2x^2-3}{x-2}$

$$\begin{array}{r} 2x+4 \\ x-2\,\overline{)\,2x^2 \qquad -3} \\ \underline{2x^2-4x} \\ 4x-3 \\ \underline{4x-8} \\ 5 \end{array}$$

$2x^2-3$

$=(x-2)(2x+4)+5$

$\dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}=(2x+4)+\dfrac{5}{x-2}$

問題①　$\dfrac{2x^2-4}{x-1}$

例題②　$\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+x}$

$\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{2x+1}{x(x-1)^2}$

$=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

$\dfrac{a(x^2-2x+1)+b(x^2-x)+cx}{x(x-1)^2}$

$a+b=0$, $-2a-b+c=2$, $a=1$ より

$a=1$, $b=-1$,　$c=3$　になり

$\dfrac{2x+1}{x^3+2x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}$

問題②　$\dfrac{3x+1}{x^3+2x^2+x}$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2-3}{x-2}dx$

$=\displaystyle\int\left(2x+4+\frac{5}{x-2}\right)dx$

$=x^2+4x+5\log|x-2|+C$

問題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2-4}{x-1}dx$

例題②　$\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

$=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\right)dx$

$=\log|x|-\log|x-1|-\dfrac{3}{x-1}+C$

問題②　$\displaystyle\int\frac{3x+1}{x^3+2x^2+x}dx$

例題③　$\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x+3)}dx$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}\left(\log|x+1|-\log|x+2|\right)+C$

問題③　$\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x+4)}dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(部分分数) ⑤ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の分数式を簡単な形で表せ。

例題①　$\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}$

$$2x^2+3x+2$$
$$=(x+1)(2x+1)+1$$
$$\frac{2x^2+3x+2}{x+1}=(2x+1)+\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x+1 & 2x^2+3x+2 \\ & 2x^2+2x \\ \hline & \quad x+2 \\ & \quad x+1 \\ \hline & \qquad 1 \end{array}$$

問題①　$\dfrac{2x^2+4x+3}{x+1}$

例題②　$\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{x+1}$

$$a=\frac{1}{x(x+1)^2}\times x\Big|_{x=0}=\frac{1}{0(0+1)^2}=1$$

$$b=\frac{1}{x(x+1)^2}\times(x+1)^2\Big|_{x=-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

$x=1$ のとき,

$$\frac{1}{1(1+1)^2}=\frac{1}{1}+\frac{-1}{(1+1)^2}+\frac{c}{1+1}\qquad c=-1$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$$

問題②　$\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{x-1}$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2+3x+2}{x+1}dx$

$$=\int\left(2x+2+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=x^2+2x+\log|x+1|+C$$

問題①　$\displaystyle\int\frac{2x^2+4x+3}{x+1}dx$

例題②　$\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)^2}$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\right.$$

$$=\log|x|+\frac{1}{x+1}-\log|x+1|+C$$

問題②　$\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)^2}x$

例題③　$\displaystyle\int\frac{1}{x(x-3)}dx$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}\left(\log|x-3|-\log|x|\right)+C$$

問題③　$\displaystyle\int\frac{1}{x(x-2)}dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(三角関数)①　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の三角関数を $\cos 2x$ を用いて表せ。

例題　$\sin^2 x$

$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

よって，$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

問題　$\cos^2 x$

2. 次の積和公式を作れ。

例題①　$\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$　・・・①

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$　・・・②

①＋②より

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$

問題①　$\cos\alpha\sin\beta$

例題②　$\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　・・・①

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$　・・・②

①－②より

$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$

問題②　$\cos\alpha\cos\beta$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\int(\sin 2x + \cos 3x + 1)dx$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + x + C$

問題①　$\int(\sin 4x + \cos 6x + 1)dx$

例題②　$\int \cos^2 x \sin x\, dx$

$u = \cos x$ とおくと　$du = -\sin x\, dx$

$\int \cos^2 x \sin x\, dx = -\int \cos^2 x(-\sin x)\, dx$

$= -\int u^2\, du = -\frac{1}{3}u^3 + C = -\frac{1}{3}\cos^2 x + C$

問題②　$\int \cos^3 x \sin x\, dx$

例題③　$\int \cos^2 2x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int(1 + \cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

問題④　$\int \sin^2 3x\, dx$

例題⑤　$\int \sin 4x \cos x\, dx$

$= \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin 3x)\, dx$

$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$

問題⑤　$\int \sin 3x \sin x\, dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(三角関数) ② 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の関数を微分せよ。

例題　$y = \tan x$

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問題　$y = \dfrac{1}{\tan x}$

2. 次の等式を証明せよ。

例題　$\dfrac{1}{\tan^2 x + 1} = \cos^2 x$

$$\frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \cos^2 x$$

Q.E.D

問題　$\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$$= \tan x + C$$

問題①　$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

問題②　$\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

4. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

$$= \int \cos^2 x \ \cos x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx$$

$u = \sin x$ とおくと　$du = \cos x\,dx$

$$\int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx = \int (1 - u^2)\,du$$

$$= u - \frac{1}{3}u^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

問題①　$\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

例題②　$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\,dx$$

$u = \cos x$ とおくと　$-\sin x\,dx = du$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{-\sin x\,dx}{\cos^2 x - 1} = \int \frac{du}{u^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\log|\cos x - 1| - \log|\cos x + 1|\Big) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$$

問題②　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

数学Ⅲ　いろいろな積分(三角関数) ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　)

1. 次の関数を微分せよ。

例題　$y = \log|\cos x|$

$$y' = \frac{(\cos x)'}{(\cos x)} = \frac{-\cos x}{\sin x} = -\tan x$$

問題　$y = \log|\sin x|$

2. 次の不定積分を求めよ。

例題　$\int \tan x\,dx$

$$= -\log|\cos x| + C$$

問題　$\int \frac{1}{\tan x}\,dx$

3. 次の不定積分を求めよ。

例題①　$\int x\sin 3x\,dx = \int x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)'dx$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x - \int (x)'\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx$$

$$= -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C$$

問題①　$\int x\cos 3x\,dx$

例題②　$\int x^2\cos 3x\,dx = \int x^2\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'dx$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \int (x^2)'\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x - \frac{2}{3}\int x\sin 3x\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$$

問題②　$\int x^2\sin 3x\,dx$

4. 次の三角関数を $\cos 2x$ を用いて表せ。

例題　$\cos^2 x$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

よって，$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

問題　$\sin^2 x$

5. 次の不定積分を求めよ。

例題　$\int \cos^4 x\,dx$

$$= \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left\{\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left\{1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right\}dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

問題　$\int \sin^4 x\,dx$