数学Ⅲ　体積 ① 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の立体の体積 V を定積分を用いて求めよ。

例題　底面が一辺 8 の正方形で，高さが 6 の四角錐

四角錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点とする。
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で四角錐を切った断面積を $S(x)$ とし，底面積を S とする。

$S = 8 \times 8 = 64$

断面と底面は相似であるから　$S(x)\ :\ S = x^2\ :\ 6^2$

$6^2 \times S(x) = x^2 \times S$

$$S(x) = \frac{x^2}{6^2} S = \frac{64\,x^2}{36} = \frac{16\,x^2}{9}$$

$$V = \int_0^6 S(x)\,dx$$

$$= \int_0^6 \frac{16\,x^2}{9}\,dx = \frac{16}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6$$

$$= \frac{16}{9}\left(\frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 128$$

問題　底面が一辺 6 の正方形で，高さが 8 の四角錐

四角錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点とする。
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で四角錐を切った断面積を $S(x)$ とし，底面積を S とする。

2. 次の式を $\cos 2x$ を用いて表せ。

例題　$\sin^2 x$

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

よって　$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

問題　$\cos^2 x$

3. 次の曲線を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

例題　$y = \sin 2x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2\,dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 2x\,dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 4x}{2}\,dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi}$$

$$= \pi\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 4\pi}{8}\right) - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{8}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{2}$$

問題　$y = \cos 2x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

数学Ⅲ　体積②　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の立体の体積 V を定積分を用いて求めよ。

例題　底面が半径3の円で，高さが4の円錐

円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点とする。
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で円錐を切った断面積を $S(x)$とし，底面積を S とする。
断面と底面は相似であるから　$S(x) : S = x^2 : 4^2$

$S = \pi \times 3^2 = 9\pi$

断面と底面は相似であるから　$S(x) : S = x^2 : 4^2$

$8^2 \times S(x) = x^2 \times S$

$$S(x) = \frac{x^2}{4^2} S = \frac{9x^2\pi}{16}$$

$$V = \int_0^4 S(x)\,dx$$

$$= \int_0^4 \frac{9x^2\pi}{16} dx = \frac{9\pi}{16}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= \frac{9\pi}{16}\left(\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 12\pi$$

問題　底面が半径2の円で，高さが6の円錐

円錐の頂点から底面に垂線を下ろし，これを x 軸とし，頂点を原点とする。
座標が x である点を通り x 軸に垂直な平面で円錐を切った断面積を $S(x)$とし，底面積を S とする。

2. 次の曲線を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

例題①　$y = \sqrt{2x}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$V = \pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2 (\sqrt{2x})^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^2 2x\,dx = \pi\left[x^2\right]_0^2$$

$$= \pi(2^2 - 0^2) = 4\pi$$

問題①　$y = \sqrt{3x}$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

例題②　$y = \sqrt{4 - x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$$V = \pi\int_{-2}^2 y^2\,dx = \pi\int_{-2}^2 (\sqrt{4 - x^2})^2\,dx$$

$$= \pi\int_{-2}^2 (4 - x^2)\,dx = \pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2$$

$$= \pi\left\{\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)\right\} = \frac{32}{3}\pi$$

問題②　$y = \sqrt{9 - x^2}$ $(-3 \leqq x \leqq 3)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

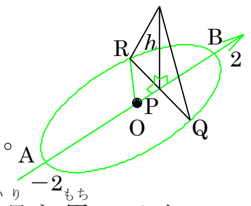
数学Ⅲ　体積 ③ 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の立体の体積 V を求めよ。

例題　半径 2 の円 O がある。直径 AB 上の点 P を通り，AB に垂直な弦 QR を底辺とする正三角形を円 O の面に対して垂直に作る。

P が A から B まで動くとき，この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

円の中心を原点に，AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とする。



直角三角形 OPR に三平方の定理を用いると

$\mathrm{PR} = \sqrt{2^2 - x^2}$

正三角形の高さ h は　$h = \sqrt{3}\ \mathrm{PR} = \sqrt{3}\sqrt{2^2 - x^2}$

正三角形の面積 $S(x)$ は

$$S(x) = \frac{1}{2} \times 2\mathrm{PR} \times h = \sqrt{3}\left(2^2 - x^2\right)$$

$$V = \int_{-2}^{2} S(x)\,dx = \sqrt{3}\int_{-2}^{2}\left(2^2 - x^2\right)dx$$

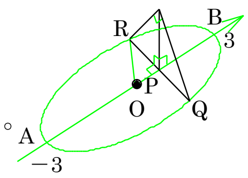
$$= 2\sqrt{3}\int_{0}^{2}\left(2^2 - x^2\right)dx$$

$$= 2\sqrt{3}\left[\ 4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}\sqrt{3}$$

問題　半径 3 の円がある。O の直径 AB 上の点 P を通り，AB に垂直な弦 QR を底辺とする高さ PR の直角二等辺三角形を円 O の面に対して垂直に作る。

P が A から B まで動くとき，この三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

円の中心を原点に，AB を x 軸にとる。点 P の座標を x とする。



2．次の回転体の体積 V を求めよ。

例題　直線 $y = x$ と曲線 $y = \sqrt{2x}$ で囲まれた図形を x 軸の周りで回転させる。

このときにできる回転体の体積 V を求めよ。

交点の x 座標を求めると　$x = 0, 2$

$x = \sqrt{2x}$　よって　$x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0,\ x(x-2) = 0$

$0 < x < 2$ のとき，$\sqrt{2x} > x$ であるから

求める体積 V は

$$V = \int_0^2 \pi\left\{\left(\sqrt{2x}\right)^2 - x^2\right\}dx$$

$$= \pi\int_0^2\left(2x - x^2\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

問題①　直線 $y = x$ と曲線 $y = \sqrt{4x}$ で囲まれた図形を x 軸の周りで回転させる。

このときにできる回転体の体積 V を求めよ。

問題②　直線 $y = 3x$ と曲線 $y = 3x^2$ で囲まれた図形を x 軸の周りで回転させる。

このときにできる回転体の体積 V を求めよ。

数学Ⅲ　体積(回転体)① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

1. 次の図形を x 軸の周りで1回転した体積 V を求めよ。

例題　$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

この楕円と x 軸の交点の座標は $(-5,0),(5,0)$

$y^2=\dfrac{4^2}{5^2}\left(5^2-x^2\right)$ であるから回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_{-5}^{5}y^2\,dx$$

$$=\pi\int_{-5}^{5}\frac{4^2}{5^2}\left(5^2-x^2\right)dx$$

$$=2\pi\times\frac{4^2}{5^2}\int_{0}^{5}\left(5^2-x^2\right)dx$$

$$=2\pi\times\frac{4^2}{5^2}\left[5^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^5$$

$$=2\pi\times\frac{4^2}{5^2}\left(5^3-\frac{5^3}{3}\right)$$

$$=\frac{320}{3}\pi$$

問題　$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$

2. 次の図形を y 軸の周りで1回転した体積 V を求めよ。

例題　$y=x^2-4$ と $y=1$ で囲まれた部分

この図形と y 軸の交点の座標は $(0,-4),(0,1)$

$x^2=y+4$ であるから回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_{-4}^{1}x^2\,dy$$

$$=\pi\int_{-4}^{1}\left(y+4\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}+4y\right]_{-4}^{1}$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{1^2}{2}+4\right)-\left(\frac{(-4)^2}{2}-16\right)\right\}$$

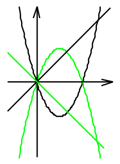
$$=\frac{25}{2}\pi$$

問題①　$y=-x^2+4$ と $y=0$ で囲まれた部分

問題②　$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

数学Ⅲ　体積(回転体) ② 課題　　( )年( )組( )番( )

例題　$y = x$ と $y = x^2 - 3x$ で囲まれた部分を x 軸の周りで1回転した体積 V を求めよ。



$y = x^2 - 3x$ と x 軸の交点の x 座標は

$x^2 - 3x = x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$

$y = x$ と $y = x^2 - 3x$ の交点の x 座標は

$x^2 - 3x = x$，$x^2 - 4x = x(x - 4) = 0$ より

$x = 0, 4$

$y = -x$ と $y = x^2 - 3x$ の交点の x 座標は

$x^2 - 3x = -x$，$x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$ より

$x = 0, 2$

(1) $0 \leqq x \leqq 2$ のとき

図形は x 軸を跨ぎ，$y = x^2 - 3x$ が外形になる。

$$V_1 = \pi \int_0^2 (x^2 - 3x)^2\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

(2) $2 \leqq x \leqq 3$ のとき

図形は x 軸を跨ぎ，$y = x$ が外形になる。

$$V_2 = \pi \int_2^3 (x)^2\, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{19}{3}\pi$$

(3) $3 \leqq x \leqq 4$ のとき

図形は x 軸を跨がない。

外側の体積から，内側の体積を引く。

$$V_3 = \pi \int_3^4 (x)^2\, dx - \pi \int_3^4 (x^2 - 3x)^2\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^4 - \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + 3x^3 \right]_3^4$$

$$= \frac{37}{3}\pi - \frac{47}{10}\pi$$

(4) $0 \leqq x \leqq 4$ のとき

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

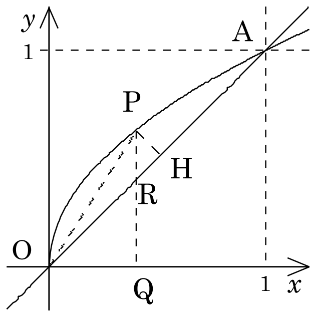
$$= \frac{32}{5}\pi + \frac{19}{3}\pi + \frac{37}{3}\pi - \frac{47}{10}\pi$$

$$= \frac{611}{30}\pi$$

問題　$y = x$ と $y = x^2 - 2x$ で囲まれた部分を x 軸の周りで1回転した体積 V を求めよ。

数学Ⅲ　体積($y = x$ の周りの回転体)　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題　曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ との原点 O 以外の交点を A とする。この曲線と直線で囲まれる部分を $y = x$ の周りで 1 回転して得られる立体の体積 V を求めよ。



曲線上の点 $\mathrm{P}(x, \sqrt{x})$ から $y = x$ と x 軸に，それぞれ垂線 PH，垂線 PQ を引き，$\mathrm{PH} = h$，$\mathrm{OH} = t$ とする。

$(0 \leqq t \leqq \sqrt{2})$

点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ であるから

$$h = \frac{|\ x - \sqrt{x}\ |}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}}$$

垂線 PQ と $y = x$ との交点を R とすると

OH ＝ OR ＋ RH ＝ OR ＋ PH であるから

$$t = \sqrt{2}\,x + \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)$$

したがって

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{PH}^2\, dt$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) dx$$

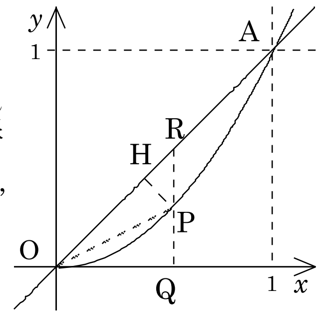
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(x - 2x\sqrt{x} + x^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{60}$$

問題　曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ との原点 O 以外の交点を A とする。この曲線と直線で囲まれる部分を $y = x$ の周りで 1 回転して得られる立体の体積 V を求めよ。



曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ から $y = x$ と x 軸に，それぞれ垂線 PH，垂線 PQ を引き，$\mathrm{PH} = h$，$\mathrm{OH} = t$ とする。

$(0 \leqq t \leqq \sqrt{2})$