

1. 地上 x_0 m から、初速度 v_0 m/s で鉛直方向へボールを投げ上げる。重力加速度 g を用いて、 t 秒後のボールの高さは $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0$ で与えられる。ボールの速度 v m/s, 加速度 α m/s² を求めよ。

例題 2 秒後の速度と加速度を求めよ。

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0 \right) = v_0 - g t$$
$$\alpha(t) = \frac{d}{dt} \left(v_0 - g t \right) = -g$$

2 秒後の速度は $v(2) = v_0 - 2g$ (m/s)

2 秒後の加速度は $\alpha(2) = -g$ (m/s²)

問題 4 秒後の速度と加速度を求めよ。

2. 時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられているとき、 $t = 2$ におけるの P の速さ, 加速度の大きさを求めよ。

時刻 t における P の速度を \vec{v} , 加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

例題 $x = 3t + 1, y = t^2 - 1$

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = 3, y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = 2t$$

よって、 $t = 2$ のとき、 $\vec{v} = (2, 4)$

P の速さ $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\vec{\alpha} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = 0, y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

よって、 $t = 2$ のとき、 $\vec{\alpha} = (0, 2)$

P の加速度 $|\vec{\alpha}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

問題 $x = 4t + 1, y = t^2 - t$

3. 時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられているとき、 $t = 2$ におけるの P の速さ, 加速度の大きさを求めよ。

例題 $x = 3 \cos \pi t, y = 3 \sin \pi t$

時刻 t における P の速度を \vec{v} , 加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = -3 \pi \sin \pi t$$
$$y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = 3 \pi \cos \pi t$$

よって、 $t = 2$ のとき、 $\vec{v} = (0, 3\pi)$

P の速さ $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (3\pi)^2} = 3\pi$

$$\vec{\alpha} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = -3 \pi^2 \cos \pi t$$
$$y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = -3 \pi^2 \sin \pi t$$

よって、 $t = 2$ のとき、 $\vec{\alpha} = (-3 \pi^2, 0)$

P の加速度 $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(-3 \pi^2)^2 + 0^2} = 3 \pi^2$

問題 $x = 4 \cos \pi t, y = 4 \sin \pi t$

1. 地上 x_0 m から、初速度 v_0 m/s で鉛直方向へボールを投げ上げる。重力加速度 g を用いて、 t 秒後のボールの
高さは $x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0$ で与えられる。
ボールの速度 v m/s, 加速度 a m/s² を求めよ。

例題 4 秒後の速度と加速度を求めよ。

$$v(t) = \frac{d}{dt} \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + x_0 \right) = v_0 - g t$$
$$a(t) = \frac{d}{dt} \left(v_0 - g t \right) = -g$$

4 秒後の速度は $v(4) = v_0 - 4g$ (m/s)

4 秒後の加速度は $a(4) = -g$ (m/s²)

問題 6 秒後の速度と加速度を求めよ。

2. 時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられているとき、 $t = 1$ におけるの P の速さ, 加速度の
大きさを求めよ。
時刻 t における P の速度を \vec{v} , 加速度を \vec{a} とする。

例題 $x = t^2 + 1, y = -t^2 - t + 1$

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = 2t, y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = -2t - 1$$

よって、 $t = 1$ のとき、 $\vec{v} = (2, -3)$

P の速さ $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$\vec{a} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = 2, y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = -2$$

よって、 $t = 1$ のとき、 $\vec{a} = (2, -2)$

P の加速度 $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

問題 $x = t^2 - 2t, y = t^2 + 1$

3. 時刻 t における点 P の座標 (x, y) が次の式で与えられているとき、 $t = \frac{1}{2}$ におけるの P の速さ, 加速度の
大きさを求めよ。

例題 $x = 4 \cos \pi t, y = \sin 2 \pi t$

時刻 t における P の速度を \vec{v} , 加速度を \vec{a} とする。

$$\vec{v} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{dx}{dt} = -4 \pi \sin \pi t$$
$$y \text{ 成分は } \frac{dy}{dt} = 2 \pi \cos 2 \pi t$$

よって、 $t = \frac{1}{2}$ のとき、 $\vec{v} = (-4 \pi, -2 \pi)$

P の速さ $|\vec{v}| = \sqrt{(-4 \pi)^2 + (-2 \pi)^2} = 2 \sqrt{5} \pi$

$$\vec{a} \text{ の } x \text{ 成分は } \frac{d^2x}{dt^2} = -4 \pi^2 \cos \pi t$$
$$y \text{ 成分は } \frac{d^2y}{dt^2} = -4 \pi^2 \sin 2 \pi t$$

よって、 $t = \frac{1}{2}$ のとき、 $\vec{a} = (0, -4 \pi^2)$

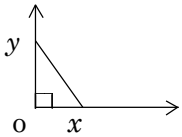
P の加速度 $|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-4 \pi^2)^2} = 4 \pi^2$

問題 $x = \pi t - \sin \pi t, y = 1 - \cos \pi t$

1. 地面に垂直な壁に棒を立てかけ、棒の下端を水平方向に引っ張った。棒の上端の速度を求めよ。
2. 座標底面上を運動する点 P の時刻 t における速さ v の最大値と最小値を求めよ。

例題 地面に垂直な壁に長さ 5 m の棒を立てかけ、下端を速さ 0.2 m/s で水平方向に引っ張った。棒の下端が壁から 3 m のときの上端の速度を求めよ。

棒の上端を $(0, y)$,
棒の下端を $(x, 0)$ とする。
三平方の定理より



$$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x = 3$ のとき、 $3^2 + y^2 = 5^2$ より $y = 4$

x, y は時刻 t の関数であるから、 $\textcircled{1}$ を t で微分して

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \quad ,$$

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = 0.2, x = 3, y = 4$ を代入して

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{3}{4} \times 0.2 = -0.15 \quad (\text{m/s})$$

問題 地面に垂直な壁に長さ 10 m の棒を立てかけ、下端を速さ 0.3 m/s で水平方向に引っ張った。棒の下端が壁から 6 m のときの上端の速度を求めよ。

例題 $x = 4 \cos t, y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\frac{dx}{dt} = -4 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (-4 \sin t)^2 + (2 \cos 2t)^2 \\ &= 16 \sin^2 t + 4(2 \cos^2 t - 1)^2 \\ &= 16(1 - \cos^2 t) + 16 \cos^4 t - 16 \cos^2 t + 4 \\ &= 16 \cos^4 t - 32 \cos^2 t + 20 = 16(\cos^2 t - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ の最大値と最小値は

$0 \leq \cos^2 t \leq 1$ であるから

最大値 20, $\cos^2 t = 0, t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

最小値 4, $\cos^2 t = 1, t = 0, \pi, 2\pi$

$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ の最大値と最小値は

最大値 $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}, t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

最小値 $\sqrt{4} = 2, t = 0, \pi, 2\pi$

問題 $x = 4 \sin t, y = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$