

1. 次の曲線の凹凸を調べ、変曲点の座標を求めよ。
2. 次の曲線の凹凸を調べ、グラフの概形を描きなさい。

例題

$y = x^4 - 6x^2$

$y' = 4x^3 - 12x$

$y'' = 12x^2 - 12 = 12(x + 1)(x - 1)$

$y'' = 0$  とすると  $x = -1, 1$

$x < -1, x > 1$  で下に凸,  $-1 < x < 1$  で上に凸

変曲点の座標は  $(-1, -6), (1, -6)$

$x$	...	-1	...	1	...
$y''$	+	0	-	0	+
$y$	下に凸	-6	上に凸	-6	下に凸

問題①

$y = x^3 - 6x^2$

$x$	
$y''$	
$y$	

問題②

$y = xe^{-x}$

$x$	
$y''$	
$y$	

例題

$y = e^{-x^2}$

※偶関数(左右対称)





$y' = (-x^2)'e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$

$y'' = (-2x)'(e^{-x^2}) + (-2x)(e^{-x^2})'$

$= -2e^{-x^2} + (-2x)(-2xe^{-x^2})$

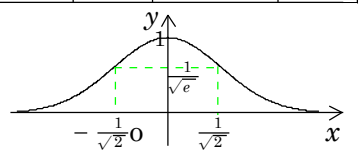
$= (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

$y'' = 0$  となるのは  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x$	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$y'$	+	+	+	0	-	-	-
$y''$	+	0	-	-	-	0	+
$y$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		1		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0$

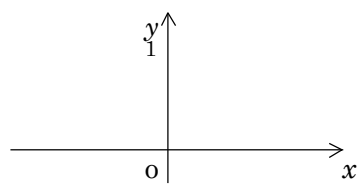
$x$  軸が漸近線



問題

$y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$x$							
$y'$							
$y''$							
$y$							



例題①  $y = \frac{x^2}{x + 1}$  を簡単な式で表 せ。

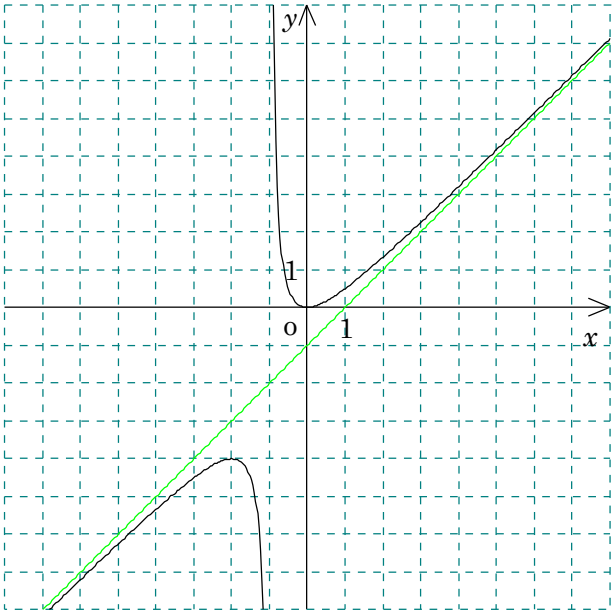
$$y = \frac{x^2}{x + 1} = \frac{x(x + 1) - x}{x + 1}$$
$$= \frac{x(x + 1) - (x + 1) + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1}$$

例題②  $y = \frac{x^2}{x + 1}$  のグラフを描きなさい。

$$y' = (x - 1)' + \left(\frac{1}{x + 1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x + 1)^2}$$
$$= \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$
$$y'' = (1)' - \left\{\frac{1}{(x + 1)^2}\right\}' = \frac{2}{(x + 1)^3}$$
$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} y = -\infty$$
$$y = \frac{x^2}{x + 1} = x - 1 + \frac{1}{x + 1} \text{ であるから}$$

漸近線は  $y = x - 1$  と  $x = -1$  である。

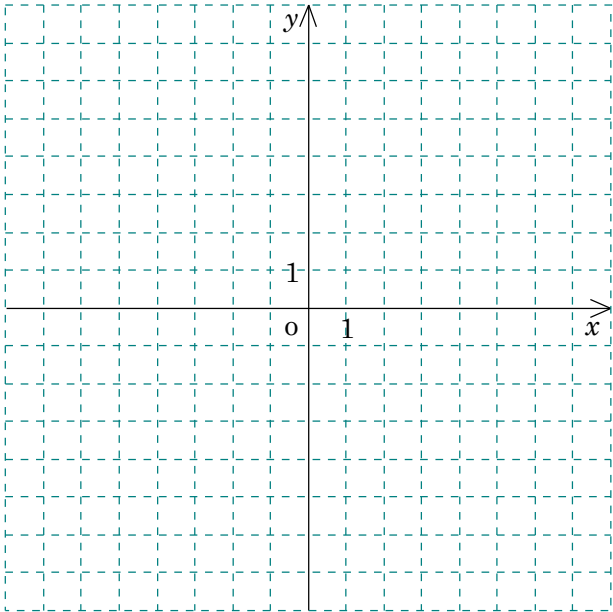
$x$	...	-2	...	-1	...	0	...
$y'$	+	0	-		-	0	+
$y''$	-	-	-		+	+	+
$y$	↶	-4	↷		↷	0	↶



問題①  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$  を簡単な式で表 せ。

問題②  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$  のグラフを描きなさい。

$x$			
$y'$			
$y''$			
$y$			



例題①  $y = x^3 - 3x + 2$  のグラフを描きなさい。

$3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1)$

$x = -1$  のとき,  $y' = 0$ ,  $y = -3$

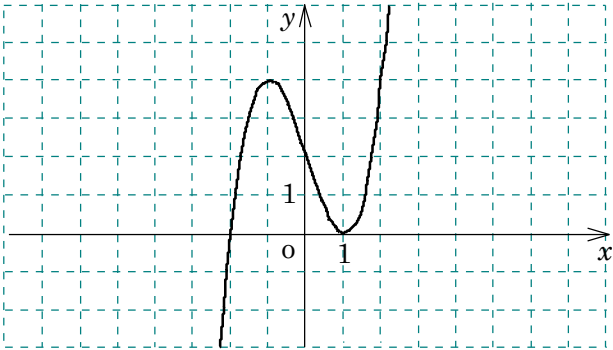
$x = 1$  のとき,  $y' = 0$ ,  $y = 0$

$y'' = 6x$  より,  $x = 0$  が変曲点

$x < 0$  のとき  $y'' < 0$

$x > 0$  のとき  $y'' > 0$

$x$	...	-1	...	0	...	1	...
$y'$	+	0	-	-	-	0	+
$y''$	-	-	-	0	+	+	+
$y$	↶	-3	↷	2	↷	0	↶



例題②  $y = x\sqrt{6-x}$  のグラフを描きなさい。

$y' = x' \sqrt{6-x} + x(\sqrt{6-x})'$

$= \sqrt{6-x} - \frac{x}{2\sqrt{6-x}} = \frac{3(4-x)}{2\sqrt{6-x}}$

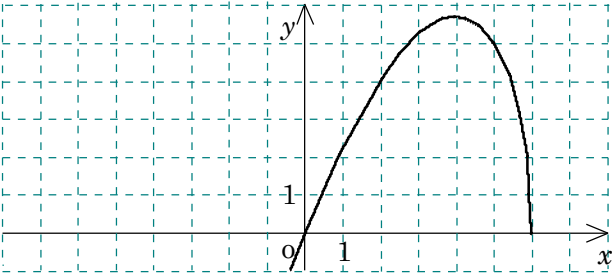
$y'' = \frac{(12-3x)' 2\sqrt{6-x} - (12-3x)(2\sqrt{6-x})'}{(2\sqrt{6-x})^2}$

$= \frac{-3(24-4x) + (24-6x)}{(2\sqrt{6-x})^3} = \frac{6(x-8)}{(2\sqrt{6-x})^3}$

$x = 4$  のとき,  $y' = 0$ ,  $y = 4\sqrt{6-4} = 4\sqrt{2}$

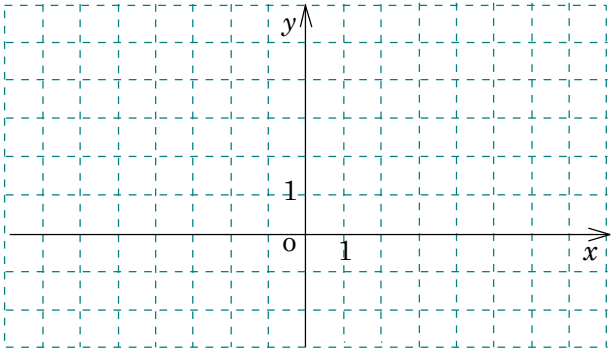
$x \leq 6$  であるから,  $y'' < 0$  変曲点なし

$x$	...	0	...	4	...	6
$y'$	+	+	+	0	-	0
$y''$	-	-	-	-	-	-
$y$	↶	0	↶	$4\sqrt{2}$	↷	0



問題①  $y = x^3 - 3x^2 + 2$  のグラフを描きなさい。

$x$							
$y'$							
$y''$							
$y$							



問題②  $y = x\sqrt{x+3}$  のグラフを描きなさい。

$x$							
$y'$							
$y''$							
$y$							

