

1. 次の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。
2. 次のような接線の方程式を求めよ。

例題①

$y = \frac{4}{(x - 1)^2}$

A(3 , 1)

$y' = -\frac{8}{(x - 1)^3}$

接線の傾きは $-\frac{8}{(3 - 1)^3} = -1$

点 A における接線の方程式は

$y - 1 = -(x - 3) , \quad y = -x + 4$

点 A における法線の方程式は

$y - 1 = 1(x - 3) , \quad y = x - 2$

問題①

$y = \frac{4}{x}$

A(1 , 4)

例題②

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$

A(3 , 2)

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ の両辺を x で微分すると

$\frac{2x}{3} - \frac{2yy'}{2} = 0 , \quad y \neq 0$ のとき $y' = \frac{2x}{3y}$

点 A における接線の傾きは $\frac{2 \times 3}{3 \times 2} = 1$

点 A における接線の方程式は

$y - 2 = 1(x - 3) , \quad y = x - 1$

点 A における法線の方程式は

$y - 2 = -1(x - 3) , \quad y = -x + 5$

問題②

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

A(4 , 3)

例題①

曲線 $y = e^{-x}$ の接線で傾きが -1

$y' = -e^{-x}$

接点の座標を (a, e^{-a}) とすると

接線の傾きが -1 であるから $-e^{-a} = -1$

よって $a = 0$, $e^{-0} = 1$ であるから

求める接線の方程式は

$y - 1 = -1(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 1$

問題①

曲線 $y = e^x$ の接線で傾きが 1

例題②

曲線 $y = e^x$ の接線で原点を通る

$y' = e^x$

接点の座標を (a, e^a) とすると

$y - e^a = e^a(x - a)$

原点を通るから $0 - e^a = e^a(0 - a)$

よって $a = 1$, $e^1 = e$ であるから

求める接線の方程式は

$y - e = e(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = ex$

問題②

曲線 $y = e^{-x}$ の接線で原点を通る

1. 次の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

例題①

$y = \frac{2}{x}$

A(1, 2)

$y' = -\frac{2}{x^2}$

点 A における接線の傾きは $-\frac{2}{1^2} = -2$

点 A における接線の方程式は

$y - 2 = -2(x - 1), \quad y = -2x + 4$

点 A における法線の方程式は

$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1), \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

問題①

$y = \frac{4}{x^2}$

A(2, 1)

例題②

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$

A(1, -2)

$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ の両辺を x で微分すると

$\frac{2x}{2} + \frac{2yy'}{8} = 0, \quad y \neq 0$ のとき $y' = -\frac{4x}{y}$

点 A における接線の傾きは $-\frac{4 \times 1}{-2} = 2$

点 A における接線の方程式は

$y - (-2) = 2(x - 1)$ すなわち $y = 2x - 4$

点 A における法線の方程式は

$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 1), \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

問題②

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$

A(1, 2)

2. 次のような接線の方程式を求めよ。

例題

$y = \sqrt{x - 1}$ の接線で (0, 0) を通る。

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}}$

接点の座標を $(a, \sqrt{a - 1})$ とすると

接線の方程式は

$y - \sqrt{a - 1} = \frac{1}{2\sqrt{a - 1}}(x - a)$

(0, 0) を通るから

$-\sqrt{a - 1} = \frac{1}{2\sqrt{a - 1}}(-a)$

$a - 1 = \frac{1}{2}a, \quad a = 2$

接線の方程式は

$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2), \quad y = \frac{1}{2}x$

問題①

$y = \frac{2}{x}$ の接線で (0, 4) を通る。

問題②

$y = \frac{4}{x^2}$ の接線で (0, 3) を通る。

1. 次の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。
2. 次のような接線の方程式を求めよ。

例題①

$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

A(2, 1)

$y' = -\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

点 A における接線の傾きは $-\frac{1}{2}$

点 A における接線の方程式は

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2), \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$

点 A における法線の方程式は

$y - 1 = 2(x - 2), \quad y = 2x - 3$

問題①

$y = \sqrt{2x+1}$

A(4, 2)

例題②

$y = x \log x$

A(1, 0)

$y' = (x)' \log x + x (\log x)' = \log x + 1$

点 A における接線の傾きは $\log 1 + 1 = 1$

点 A における接線の方程式は

$y - 0 = 1(x - 1), \quad y = x - 1$

点 A における法線の方程式は

$y - 0 = -1(x - 1), \quad y = -x + 1$

問題②

$y = \log x + 1$

A(1, 1)

例題

$y = \sqrt{2x+1}$ の接線で $(-5, 0)$ を通る。

$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

接点の座標を $(a, \sqrt{2a+1})$ とすると

接線の方程式は

$y - \sqrt{2a+1} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}(x - a)$

$(-5, 0)$ を通るから

$-\sqrt{2a+1} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}(-5 - a)$

$-(2a+1) = (-5 - a), \quad a = 4$

接線の方程式は

$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4), \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

問題①

$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ の接線で $(0, 2)$ を通る。

問題②

$y = \log x + 1$ の接線で $(0, 0)$ を通る。

1. 次の2つの式が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。
2. 次の2つの式が共有点で共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

例題

$$y = -x^3 \text{ と } y = \frac{1}{x}$$

$y = -x^3$ 上の点 $(s, -s^3)$ の接線を求める。

接線の方程式は $y + s^3 = -3s^2(x - s)$

$$y = -3s^2x + 2s^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$y = \frac{1}{x}$ の上の点 $(t, \frac{1}{t})$ の接線を求める。

接線の方程式は $y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t)$

$$y = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②の式は一致するから $\ast s \neq 0$

$$-3s^2 = -\frac{1}{t^2}, 2s^3 = \frac{2}{t}$$
$$\frac{1}{t} = s^3 \text{ より } -3s^2 = s^6$$
$$s^6 - 3s^2 = s^2(s^4 - 3) = 0 \text{ より } s = \pm \sqrt[4]{3}$$

共通接線の方程式は $y = -3\sqrt{3}x \pm 2\sqrt[4]{3}$

問題

$$y = x^2 \text{ と } y = \frac{1}{x}$$

例題

$$y = ax^2 \text{ と } y = 2\log x$$

共有点の x 座標を p とする。

接線の傾きより $2ap = \frac{2}{p}, ap^2 = 1$

y 座標より $ap^2 = 2\log p$

$$1 = 2\log p = \log p^2, p^2 = e$$
$$p > 0 \text{ であるから } p = \sqrt{e}$$

y 座標は $y = 2\log \sqrt{e} = \log e = 1$

共通接線の方程式は

$$y - 1 = \frac{2}{\sqrt{e}}(x - \sqrt{e})$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{e}}x - 1$$

問題

$$y = ax^3 \text{ と } y = 3\log x$$

1. 次の2つの式が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。
2. 次の2つの式が共有点で共通接線をもつとき、定数 a の値を求めよ。

例題

$y = x^3$ と $y = x\sqrt{x}$ が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

$y = x^3$ 上の点 (s, s^3) の接線を求める。

接線の方程式は $y - s^3 = 3s^2(x - s)$

$y = 3s^2x - 2s^3 \qquad \cdots \textcircled{1}$

$y = x\sqrt{x}$ の上の点 $(t, t\sqrt{t})$ の接線を求める。

接線の方程式は $y - t\sqrt{t} = \frac{3\sqrt{t}}{2}(x - t)$

$y = \frac{3\sqrt{t}}{2}x - \frac{t\sqrt{t}}{2} \qquad \cdots \textcircled{2}$

①, ②の式は一致するから

$3s^2 = \frac{3\sqrt{t}}{2}, \quad -2s^3 = -\frac{t\sqrt{t}}{2}$

$s = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad t = 2\frac{3}{2}$

共通接線の方程式は $y = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}x - 1$

問題

$y = -x^2$ と $y = \sqrt{x}$ が共通接線をもつとき、その共通接線の方程式を求めよ。

例題

$y = \frac{x^2}{16}$ と $y = \sqrt{x + a}$ が共有点を持ち、その点における接線が一致しているとき、定数 a の値を求めよ。

共通点の x 座標を p とする。

接線の傾きより $\frac{p}{8} = \frac{1}{2\sqrt{p + a}}$

y 座標より $\frac{p^2}{16} = \sqrt{p + a}$

よって、 $\sqrt{p + a} = \frac{4}{p} = \frac{p^2}{16}$

$p^3 = 64, p = 4$

$\sqrt{4 + a} = \frac{4^2}{16} = 1 \quad \therefore a = -3$

接線の方程式は $y = -\frac{1}{2}x - 1$

問題

$y = \frac{x^2}{2}$ と $y = \sqrt{x + a}$ が共有点を持ち、その点における接線が一致しているとき、定数 a の値を求めよ。

