

1. 次の関数について、第1次導関数から第3次導関数を求めよ。

例題	問題
① $y = \log 2x$ $y' = \frac{1}{x}$ $y'' = -\frac{1}{x^2}$ $y''' = \frac{2}{x^3}$	① $y = x \log x - x$
② $y = \cos 2x$ $y' = -2 \sin 2x$ $y'' = -4 \cos 2x$ $y''' = 8 \sin 2x$	② $y = \sin 2x$
③ $y = e^{2x}$ $y' = 2e^{2x}$ $y'' = 4e^{2x}$ $y''' = 8e^{2x}$	③ $y = e^{-x}$

2. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

例題① $y = \cos 2x$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ より $y^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right)$
問題① $y = \sin 2x$
例題② $y = e^{2x}$ $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$
問題② $y = e^{-x}$

3. 次の陰関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

例題	問題
① $y^2 = -8x$ <small>りょうへん</small> 両辺を x で微分して $2y \frac{dy}{dx} = -8$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y}$	① $y^2 = 6x$
② $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ <small>りょうへん</small> 両辺を x で微分して $\frac{2x}{16} + \frac{2y}{9} \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}$	② $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

4. 曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

例題	問題
① $x = t^2, y = 2t + 1$ $\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$	① $x = 2t^3, y = 3t^2 + 1$
② $x = \cos 2t, y = \sin t$ $\frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t$ $\frac{dy}{dt} = \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-2 \sin 2t} = -\frac{\cos t}{4 \sin t \cos t} = -\frac{1}{4 \sin t}$	② $x = \cos 2t, y = \sin 2t$

数学Ⅲ じ どうかんすう **n次導関数** ② か だい 課題

()年()組()番()

1. 次の関数について、第1次導関数から第3次導関数を求めよ。 a は0でない定数とする。

例題	問題
① $y = \frac{a}{x} = ax^{-1}$ $y' = -\frac{a}{x^2}$ $y'' = \frac{2a}{x^3}$ $y''' = -\frac{6a}{x^4}$	① $y = ax^3$
② $y = \sin ax$ $y' = a \cos ax$ $y'' = -a^2 \sin ax$ $y''' = -a^3 \cos ax$	② $y = \cos ax$

2. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

例題	問題
$y = xe^{-x}$ $y' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})'$ $= e^{-x} - xe^{-x} = -(x-1)e^{-x}$ $y'' = (-x+1)'e^{-x} + (-x+1)(e^{-x})'$ $= -e^{-x} - (-x+1)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$ $y''' = (x-2)'e^{-x} + (x-2)(e^{-x})'$ $= e^{-x} - (x-2)e^{-x} = -(x-3)e^{-x}$ よって $y^{(n)} = (-1)^n (x-n)e^{-x}$	$y = xe^x$

3. 次の陰関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

例題	問題
① $y^2 = 4x$ <small>りょうへん</small> 両辺を x で微分して $2y \frac{dy}{dx} = 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$	① $y^2 = -x$
② $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ <small>りょうへん</small> 両辺を x で微分して $\frac{2x}{4} - \frac{2y}{9} \frac{dy}{dx} = 0$ $\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y}$	② $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

4. 曲線の媒介変数表示が次の式で与えられているとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

例題	問題
① $x = t^2 + 1, y = 2t$ $\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 2$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ $= \frac{2}{2} = t$	① $x = 6t^2 + 1, y = 4t^3$
② $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$ $\frac{dx}{dt} = -2 \cos t \sin t$ $\frac{dy}{dt} = 2 \sin t \cos t$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin t \cos t}{-2 \cos t \sin t}$ $= -1$	② $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$

1. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

例題 $y = x^2 e^{-x}$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' \\ &= 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} \\ &= (-x^2 + 2x) e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (-x^2 + 2x)' e^{-x} + (-x^2 + 2x) (e^{-x})' \\ &= (-2x + 2) e^{-x} - (-x^2 + 2x) e^{-x} \\ &= (x^2 - 4x + 2) e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''' &= (x^2 - 4x + 2)' e^{-x} + (x^2 - 4x + 2) (e^{-x})' \\ &= (2x - 4) e^{-x} - (x^2 - 4x + 2) e^{-x} \\ &= (-x^2 + 6x - 6) e^{-x} \end{aligned}$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \{ x^2 - 2nx + n(n-1) \}$$

※ $2, 4, 6, \dots$ の数列は $a_n = 2n$

$0, 2, 6, \dots$ の数列は $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n$

となる階差数列 $a_n = n(n-1)$

問題 $y = x^2 e^x$

2. 次の関数を割った余りを指定した関数で表せ。

例題 関数 $f(x)$ を $(x-k)^3$ で割ったときの余りを $f(k), f'(k), f''(k)$ を用いて表せ。

$f(x)$ を $(x-k)^3$ で割った商を $Q(x)$ とすると

$$f(x) = (x-k)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c \text{ とおける。}$$

$$f'(x) = 3(x-k)^2 Q(x) + (x-k)^3 Q'(x) + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6(x-k) Q(x) + 3(x-k)^2 Q'(x)$$

$$+ 3(x-k)^2 Q'(x) + (x-k)^3 Q''(x) + 2a$$

$$f''(k) = 2a \text{ より } a = \frac{f''(k)}{2}$$

$$f'(k) = 2ak + b \text{ より } b = f'(k) - f''(k)k$$

$$f(k) = ak^2 + bk + c \text{ より}$$

$$c = f(k) - \frac{f''(k)}{2}k^2 - \{f'(k) - f''(k)k\}k$$

関数 $f(x)$ を $(x-k)^3$ で割ったときの余りは

$$\frac{f''(k)}{2}x^2 + \{f'(k) - f''(k)k\}x$$

$$+ f(k) + \frac{f''(k)}{2}k^2 - f'(k)k$$

問題 関数 $f(x)$ を $(x-k)^2$ で割ったときの余りを $f(k), f'(k)$ を用いて表せ。