数学Ⅲ　対数・指数関数の導関数 ① 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ より，次の極限を求めよ。

例題	問題
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$ $\frac{2}{n}=t$ とおく。 $n\to\infty$ のとき $t\to 0$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$ $=\lim_{t\to\infty}\left(1+t\right)^{\frac{2}{t}}$ $=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}\right\}^{2}$ $=e^{2}$	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

2．次の極限を求めよ。

例題	問題
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}$ $f(x)=\log(x+1)$ とおく。 $f(0)=\log 1=0$ $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-0}{x-0}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $=f'(0)=\frac{1}{0+1}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$

3．次の関数を微分せよ。　　※ $\log_e x$ を $\log x$ と書く。

例題	問題
① $y=\log_2 x$ $y'=\frac{1}{x\log 2}$	① $y=\log_3 x$
② $y=\log 5x$ $y'=\frac{1}{5x}\times(5x)'$ $=\frac{1}{x}$	② $y=\log 4x$
③ $y=\log(x^2+3)$ $y'=\frac{1}{x^2+3}\times(x^2+3)'$ $=\frac{2x}{x^2+3}$	③ $y=\log(x+2)$
④ $y=4^{x}$ $y'=4^{x}\log 4$	④ $y=3^{x}$
⑤ $y=2^{3x}$ $y'=2^{3x}\log 2\times(3x)'$ $=3\times 2^{3x}\log 2$	⑤ $y=3^{2x}$
⑥ $y=e^{4x}$ $y'=e^{4x}\times(4x)'$ $=4e^{4x}$	⑥ $y=e^{3x}$
⑦ $y=x^2\log x$ $y'=(x^2)'\log x+x^2(\log x)'$ $=2x\log x+x^2\times\frac{1}{x}$ $=2x\log x+x$	⑦ $y=x\log x$
⑧ $y=x^3e^{x}$ $y'=(x^3)'e^{x}+x^3(e^{x})'$ $=3x^2e^{x}+x^3e^{x}$ $=(x^3+3x^2)e^{x}$	⑧ $y=x^2e^{x}$

数学Ⅲ　対数・指数関数の導関数 ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ より，次の極限を求めよ。

例題	問題
$\displaystyle\lim_{h\to0}\left(1+h\right)^{-\frac{2}{h}}$ $\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{1}{\left\{\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}\right\}^{2}}$ $\displaystyle=\frac{1}{e^{2}}$	$\displaystyle\lim_{h\to0}\left(1+h\right)^{-\frac{1}{2h}}$

2. 次の文章の $\square$ を埋めて，$\log_a x$ を微分せよ。
a は 1 でない正の定数とする。

$$\lim_{h\to0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{\frac{}{}}$$

$$=\lim_{h\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$$

$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと　$h\to0$ のとき，$t\to\square$

$$\lim_{h\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)^{\frac{1}{h}}=\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{}$$

底の変換公式より　$\log_a e=\boxed{\dfrac{\log_e}{\log_e}}=\boxed{\dfrac{1}{\log}}$

$$(\log_a x)'=\boxed{\frac{}{}}$$

3. 次の文章の $\square$ を埋めて，$y=a^x$ を微分せよ。

$y=a^x$　の両辺を a を底とする対数をとると

$\log_a y=\boxed{\log_a}=\boxed{\log_a a}=x$

$x=\log_a y$ を微分すると　$\dfrac{dx}{dy}=\boxed{\dfrac{}{}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\boxed{\frac{}{}}}=\boxed{}$$

4. 次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y=\log_{10}x$ $y'=\dfrac{1}{x\log 10}$	① $y=\log_4 x$
② $y=\log\lvert 3x+1\rvert$ $y'=\dfrac{1}{3x+1}\times(3x+1)'$ $=\dfrac{3}{3x+1}$	② $y=\log\lvert 2x+1\rvert$
③ $y=\log\lvert\sin x\rvert$ $y'=\dfrac{1}{\sin x}\times(\sin x)'$ $=\dfrac{\cos x}{\sin x}$	③ $y=\log\lvert\cos x\rvert$
④ $y=2^x$ $y'=2^x\log 2$	④ $y=8^x$
⑤ $y=e^{4x+1}$ $y'=e^{4x+1}\times(4x+1)'$ $=4e^{4x+1}$	⑤ $y=e^{3x+1}$
⑥ $y=\dfrac{e^x}{x^2}$ ※商の公式 $y'=\dfrac{(e^x)'x^2-e^x(x^2)'}{x^4}$ $=\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}$ $=\dfrac{xe^x-2e^x}{x^3}$ ※積の公式 $y'=(e^x)'x^{-2}+e^x(x^{-2})'$ $=x^{-2}e^x-2x^{-3}e^x$ $=\dfrac{xe^x-2e^x}{x^3}$	⑥ $y=\dfrac{e^x}{x}$

数学Ⅲ　対数・指数関数の導関数 ③ 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. $\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ より，次の極限を求めよ。

例題　$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x$

$-\frac{2}{x}=h$ とすると $x=-\frac{3}{h}$

$x\to\infty$ のとき $h\to0$ より

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{h\to0}\left(1+h\right)^{-\frac{3}{h}}$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{\left\{\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}\right\}^3}=\frac{1}{e^3}$

問題　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

2. 次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，$\log_a x$ を微分せよ。
a は 1 でない正の定数とする。

$\lim_{h\to0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

$=\lim_{h\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{\frac{}{}}$

$=\lim_{h\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$

$\frac{h}{x}=t$ とおくと $h\to0$ のとき，$t\to\boxed{}$

$\lim_{h\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+\frac{}{}}\right)$

$=\lim_{t\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)$

$=\lim_{t\to0}\boxed{\frac{}{}}\log_a\left(\boxed{1+}\right)^{\frac{1}{h}}=\boxed{\frac{}{}}\log_a\boxed{}$

底の変換公式より $\log_a e=\boxed{\frac{\log_e}{\log_e}}=\boxed{\frac{1}{\log}}$

$(\log_a x)'=\boxed{\frac{}{}}$

3. 次の文章の $\boxed{}$ を埋めて，$y=a^x$ を微分せよ。

$y=a^x$ の両辺を a を底とする対数をとると

$\log_a y=\boxed{\log_a}=\boxed{\log_a a}=x$

$x=\log_a y$ を微分すると $\frac{dx}{dy}=\boxed{\frac{}{}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\boxed{\frac{}{}}}=\boxed{}$

4. 次の関数を微分せよ。

例題	問題
① $y=3^x$ $y'=3^x\log 3$	① $y=5^x$
② $y=\log_3 x$ $y'=\frac{1}{x\log 3}$	② $y=\log_5 x$
③ $y=\log\lvert 2-x\rvert$ $y'=\frac{1}{2-x}\times(2-x)'$ $=\frac{-1}{2-x}=\frac{1}{x-2}$	③ $y=\log\lvert 1-x\rvert$
④ $y=e^{2x-1}$ $y'=e^{2x-1}\times(2x-1)'$ $=2e^{2x-1}$	④ $y=e^{3x+1}$
⑤ $y=\frac{x^2}{e^x}$ ※商の公式 $y'=\frac{(x^2)'e^x-x^2(e^x)'}{e^{2x}}$ $=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}$ $=\frac{2x-x^2}{e^x}$	⑤ $y=\frac{x}{e^x}$

数学Ⅲ　対数関数の導関数　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の計算をせよ。

例題	$\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ $=\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
問題	$\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

2. 次の式を微分せよ。

例題①	$y=\log\left(x^2+1\right)$ $y'=\dfrac{1}{x^2+1}\times\left(x^2+1\right)'=\dfrac{2x}{x^2+1}$
問題①	$y=\log\left(x^2-1\right)$
例題②	$y=\log\left(\sin x\right)$ $y'=\dfrac{1}{\sin x}\times\left(\sin x\right)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$
問題②	$y=\log\left(\cos x\right)$
例題③	$y=\dfrac{1}{3}\left(\log x\right)^3$ $y'=\dfrac{1}{3}\times3\times\left(\log x\right)^2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{\left(\log x\right)^2}{x}$
問題③	$y=\dfrac{1}{2}\left(\log x\right)^2$
例題④	$y=x\log x+x$ $y'=\left(x\right)'\log x+x\left(\log x\right)'+\left(x\right)'$ $=\log x+x\times\dfrac{1}{x}+1=\log x+2$
問題④	$y=x\log x-x$

3. 次の式を微分せよ。

例題①	$y=x+\sqrt{x^2-1}$ $y'=1+\dfrac{1}{2}\times2x\times\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
問題①	$y=x+\sqrt{x^2+1}$
例題②	$y=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\times\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'$ $=\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
問題②	$y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
例題③	$y=\dfrac{\log x}{x^2}$ $y'=\dfrac{\left(\log x\right)'\times x^2-\log x\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$ $=\dfrac{x-2x\log x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$
問題③	$y=\dfrac{\log x}{x^3}$

数学Ⅲ　指数関数(しすうかんすう)の導関数(どうかんすう)　課題(かだい)　　(　)年(　)組(　)番(　　　　)

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ より，次(つぎ)の極限(きょくげん)を求(もと)めよ。

例題(れいだい)	問題(もんだい)
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}$ $=\lim_{x\to 0}\log(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ $n=\frac{1}{2x}$ とおくと $x\to +0$ のとき $n\to\infty$ $\lim_{x\to 0}\log(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ $=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ $=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{2}}$ $=\log e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{2x}$

2. 定義(ていぎ)に従(したが)って，次(つぎ)の関数(かんすう)を微分(びぶん)せよ。

例題(れいだい)　$f(x)=2^x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2^x(2^h-1)}{h}=2^x\times\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}$$

$y=2^h-1$　とおくと　$h=\log_2(1+y)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_2(1+y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_2(1+y)}{y}}=\frac{1}{\log_2 e}=\log 2$$

ゆえに　$f'(x)=2^x\log 2$

問題(もんだい)　$f(x)=e^x$

3. 次(つぎ)の関数(かんすう)を微分(びぶん)せよ。

例題(れいだい)①　$y=3^x$

$y'=3^x\log 3$

問題(もんだい)①　$y=5^x$

例題(れいだい)②　$y=3^{x+1}$　　$=3\times 3^x$

$y'=3^{x+1}\log 3\times(x+1)'$

$=3^{x+1}\log 3$

問題(もんだい)②　$y=2^{x+1}$

例題(れいだい)③　$y=e^{2x+1}$

$y'=e^{2x+1}\times(2x+1)'$

$=e^{2x+1}\times 2=2\times e^{2x+1}$

問題(もんだい)③　$y=e^{-x+1}$

例題(れいだい)④　$y=\frac{e^x}{x}$

$$y'=\left(e^x\right)'\times\frac{1}{x}+e^x\times\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=e^x\times\frac{1}{x}+e^x\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

問題(もんだい)④　$y=\frac{e^x}{x^2}$

数学Ⅲ　対数微分法 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. $\{\log|f(x)|\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ を用いて，関数を微分せよ。

例題　$y = \dfrac{x^2(x+1)}{x+2}$

$\log|y| = 2\log|x| + \log|x+1| - \log|x+2|$

両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{2(x+1)(x+2) + x(x+2) - x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x^2+7x+4}{x(x+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{2x^2+7x+4}{x(x+1)(x+2)} \times \frac{x^2(x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{(2x^2+7x+4)x}{(x+2)^2}$$

問題　$y = \dfrac{x^2(x+3)}{x+1}$

2. 対数微分法により，次の関数を微分せよ。

例題①　$y = x^{\sin x}$　　$(x > 0)$

$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \times \log x$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \times \log x + \sin x \times (\log x)'$$

$$= \cos x \times \log x + \sin x \times \frac{1}{x}$$

$$y' = \left(\cos x \times \log x + \sin x \times \frac{1}{x}\right) \times x^{\sin x}$$

問題①　$y = x^{\cos x}$　　$(x > 0)$

例題②　$y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$$\log|y| = \log\left|\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right|$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2}\log|x+1|$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{x+2}{2x(x+1)}$$

$$y' = \frac{x+2}{2x(x+1)} \times \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$y' = \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

問題②　$y = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$