

1. 次の関数の連続性を調べよ。

例題	問題
<p>① <math>f(x)=\sqrt{x+1}</math></p> <p><math>f(x)</math>の定義域は</p> <p><math>x\geq-1</math></p> <p><math>\lim_{x\rightarrow-1+0}\sqrt{x+1}=0</math></p> <p><math>f(-1)=\sqrt{0}=0</math></p> <p><math>f(x)=\sqrt{x+1}</math> は</p> <p><math>x\geq-1</math>で連続である。</p>	<p>① <math>f(x)=\sqrt{1-x}</math></p>
<p>② <math>f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} &amp; (x\neq 1) \\ 1 &amp; (x=1)\end{cases}</math></p> <p><math>f(x)</math>の定義域は</p> <p>すべての実数</p> <p><math>\lim_{x\rightarrow 1-0}f(x)=2</math></p> <p><math>\lim_{x\rightarrow 1+0}f(x)=2</math></p> <p><math>f(1)=1</math> より</p> <p><math>f(x)</math> は <math>x=1</math> で不連続</p> <p>である。</p>	<p>② <math>f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} &amp; (x\neq 2) \\ 2 &amp; (x=2)\end{cases}</math></p>

2. 次の関数の  $x=0$  での連続性を調べよ。

例題	問題
<p><math>f(x)=\lfloor 2x \rfloor</math></p> <p>ガウス記号 <math>\lfloor x \rfloor</math> は</p> <p><math>x</math>を超えない最大の整数</p> <p><math>\lim_{x\rightarrow-0}\lfloor 2x \rfloor=-1</math></p> <p><math>\lim_{x\rightarrow+0}\lfloor 2x \rfloor=1</math></p> <p><math>f(x)=\lfloor 2x \rfloor</math> は</p> <p><math>x=0</math>で不連続</p> <p>である。</p>	<p><math>f(x)=\lfloor -x \rfloor</math></p>

3. 次の関数が  $x=1$  で連続になるように定数  $a$  の値を定めよ。

例題	問題
<p><math>f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1} &amp; (x\neq 1) \\ a &amp; (x=1)\end{cases}</math></p> <p><math>\lim_{x\rightarrow 1}\frac{x^4-1}{x-1}</math></p> <p><math>=\lim_{x\rightarrow 1}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}</math></p> <p><math>=\lim_{x\rightarrow 1}(x^2+1)(x+1)</math></p> <p><math>=4</math></p> <p><math>x=1</math>で連続になる条件</p> <p>は <math>\lim_{x\rightarrow 1}f(x)=f(1)</math></p> <p><math>f(1)=a</math> より</p> <p><math>a=4</math></p>	<p><math>f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} &amp; (x\neq 1) \\ a &amp; (x=1)\end{cases}</math></p>

4. 次の方程式が  $2<x<3$  の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

例題	問題
<p><math>2^x-x-4=0</math></p> <p><math>f(x)=2^x-x-4</math></p> <p>とおくと、<math>f(x)</math> は</p> <p>閉区間 <math>[2,3]</math> で連続</p> <p><math>f(2)=-1</math></p> <p><math>f(3)=1</math></p> <p>中間値の定理により</p> <p><math>f(x)</math> は <math>2&lt;x&lt;3</math> の</p> <p>範囲に少なくとも1つの</p> <p>実数解をもつ</p>	<p><math>3^x-5x-4=0</math></p>

1. 次の関数の連続性を調べよ。

3. 次の関数が  $x = -1$  で連続になるように定数  $a$  の値を定めよ。

例題	問題
<p>① <math>f(x)=\sqrt{4-x}</math></p> <p><math>f(x)</math>の定義域は <math>x \leq 4</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 4+0} \sqrt{4-x} = 0</math></p> <p><math>f(4) = \sqrt{0} = 0</math></p> <p><math>f(x)=\sqrt{4-x}</math> は <math>x \leq 4</math> で連続である。</p>	<p>① <math>f(x)=\sqrt{x-4}</math></p>
<p>② <math>f(x)=\begin{cases} \frac{x}{ x } &amp; (x \neq 0) \\ 1 &amp; (x = 0) \end{cases}</math></p> <p><math>f(x)</math>の定義域はすべての実数</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x)</math>が存在しない。</p> <p><math>f(x)</math> は <math>x = 0</math> で不連続である。</p>	<p>② <math>f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{ x } &amp; (x \neq 0) \\ 0 &amp; (x = 0) \end{cases}</math></p>

2. 次の関数の  $x = 0$  での連続性を調べよ。

例題	問題
<p><math>f(x) = x[x]</math></p> <p>ガウス記号 <math>[x]</math> は <math>x</math>を超えない最大の整数</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -0} x[x] = 0 \times (-1) = 0</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +0} x[x] = 0 \times 0 = 0</math></p> <p><math>f(0) = 0</math> より</p> <p><math>f(x)</math> は <math>x = 0</math> で連続である。</p>	<p><math>f(x) = (x+1)[x]</math></p>

例題	問題
<p><math>f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-1}{x+1} &amp; (x \neq -1) \\ a &amp; (x = -1) \end{cases}</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4-1}{x-1}</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}</math></p> <p><math>= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1)(x-1)</math></p> <p><math>= -4</math></p> <p><math>x = -1</math> で連続になる</p> <p>条件 は <math>\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)</math></p> <p><math>f(-1) = a</math> より</p> <p><math>a = -4</math></p>	<p><math>f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} &amp; (x \neq -1) \\ a &amp; (x = -1) \end{cases}</math></p>

4. 次の方程式が  $2 < x < 3$  の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを示せ。

例題	問題
<p><math>2x^2 - 5x + 1 = 0</math></p> <p><math>f(x) = 2x^2 - 5x + 1</math></p> <p>とおくと、<math>f(x)</math> は閉区間 <math>[2, 3]</math> で連続</p> <p><math>f(2) = -1</math></p> <p><math>f(3) = 4</math></p> <p>中間値の定理により</p> <p><math>f(x)</math> は <math>2 &lt; x &lt; 3</math> の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ</p>	<p><math>x^2 - 3x + 1 = 0</math></p>

1. 次の関数の関数が連続である区間を求めよ。

例題	問題
① $f(x)=x^3-7x^2+1$  すべての実数  $(-\infty,\infty)$	① $f(x)=x^2+2x+1$
② $f(x)=2\log x$  $x>0$  $(0,\infty)$	② $f(x)=\log x^2$
③ $f(x)=\sqrt{4-x}$  $-\infty<x\leq 4$  $(-\infty,4]$	③ $f(x)=\sqrt{x-4}$
④ $f(x)=\frac{x}{x-1}$  $x<1,1<x$  $(-\infty,1),(1,-\infty)$	④ $f(x)=\frac{1}{x-2}$

2. 次の関数  $f(x)$  の連続性を調べよ。

例題	問題
$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$  $\frac{x^2-1}{x-1}$ は $x\neq 1$ で連続である。  $\lim_{x\rightarrow 1+0}\frac{x^2-1}{x-1}=2$  $\lim_{x\rightarrow 1-0}\frac{x^2-1}{x-1}=2$  $\lim_{x\rightarrow 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$  $\lim_{x\rightarrow 1}f(x)=f(2)$  $f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ において連続である。	$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2) \\ 4 & (x=2) \end{cases}$

3. 次の関数がすべての実数において連続になるように定数  $a$  の値を定めよ。

例題	問題
$f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$  $\frac{x^4-1}{x-1}$ は $x\neq 1$ で連続  $\lim_{x\rightarrow 1}\frac{x^4-1}{x-1}$  $=\lim_{x\rightarrow 1}(x^3+x^2+x+1)$  $=4$  $x=1$ で連続になる  条件 は $\lim_{x\rightarrow -1}f(x)=f(1)$  $f(1)=a$ より $a=4$  $a=4$ のとき, すべての実数において連続になる。	$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$

4. 次の方程式が  $0<x<\pi$  の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

例題	問題
$x-2\cos x=0$  $f(x)=x-2\cos x$  とおく。  $f(x)$ は閉区間 $[0,\pi]$ で連続である。  $f(0)=-1<0$  $f(\pi)=\pi+2>0$  中間値の定理により  $f(x)$ は $0<x<\pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ	$3\cos x-x=0$