数学Ⅲ　無限級数 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

1．次の無限級数の和を求めよ。

例題　$\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6}+\cdots$

第 n 項は $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

問題　$\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot7}+\cdots$

2．次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときは，その和を求めよ。

例題	問題
①初項 3，公比 $\dfrac{1}{4}$ $\left\lvert\dfrac{1}{4}\right\rvert<1$ より 収束する。その和は $\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{4}}=4$	①初項 2，公比 $\dfrac{1}{3}$
②初項 2，公比 $\sqrt{2}$ $\lvert\sqrt{2}\rvert>1$ より 発散する。	②初項 1，公比 $-\sqrt{3}$

3．次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，その和を求めよ。

例題　$x+x(x+1)+x(x+1)^2+x(x+1)^3+\cdots$

初項が x，公比 $(x+1)$ であるから，収束するための必要十分条件は $x=0$ または $\lvert x+1\rvert<1$

$\lvert x+1\rvert<1$　より　$-1<x+1<1$

したがって　$-2<x<0$

求める x の値の範囲は　$-2<x\leqq0$

$x=0$ のとき，和は　0

$-2<x<0$ のとき和は $\dfrac{x}{1-(x+1)}=-1$

問題　$1+(x+2)+(x+2)^2+(x+2)^3+\cdots$

数学Ⅲ　無限級数 ② 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の無限級数の和を求めよ。

例題　$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\cdots$

第 n 項は $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{4}$$

問題　$\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots$

2．次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときは，その和を求めよ。

例題	問題
①初項 2，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\left\lvert\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rvert<1$ より 収束する。その和は $\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ $=4+2\sqrt{2}$	①初項 2，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
②初項 2，公比 $-\sqrt{2}$ $\lvert-\sqrt{2}\rvert>1$ より 発散する。	②初項 2，公比 $\sqrt{3}$

3．次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。

例題　$x+x(x^2-1)+x(x^2-1)^2+x(x^2-1)^3+\cdots$

初項が x，公比 (x^2-1) であるから，収束するための必要十分条件は $x=0$ または $\lvert x^2-1\rvert<1$

$\lvert x^2-1\rvert<1$ より $-1<x^2-1<1$

$$\begin{cases} x^2-1<1 \text{ より } & x^2<2,\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ x^2-1>-1 \text{ より } & x^2>0,\ x<0 \text{ または } x>0 \end{cases}$$

よって求める範囲は $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

問題　$1+(1-x^2)+(1-x^2)^2+(1-x^2)^3+\cdots$

数学Ⅲ　無限級数 ③ 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

1．次の無限級数の和を求めよ。

例題　$\dfrac{3}{2\cdot 5}+\dfrac{3}{5\cdot 8}+\dfrac{3}{8\cdot 11}+\dfrac{3}{11\cdot 14}+\cdots$

第 n 項は $\dfrac{3}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{3\,n-1}-\frac{1}{3\,n+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\,n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\,n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

問題　$\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\dfrac{2}{5\cdot 7}+\dfrac{2}{7\cdot 9}+\cdots$

2．次のような無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときは，その和を求めよ。

例題	問題
①初項 1，公比 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\left\lvert\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\rvert>1$ より 発散する。	①初項 1，公比 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$
②初項 1，公比 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\left\lvert\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\rvert<1$ より 収束する。その和は $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ $=4+2\sqrt{3}$	②初項 1，公比 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

3．次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲と，その和を求めよ。

例題　$1+(2-x)+(2-x)^2+(2-x)^3+\cdots$

初項が 1，公比 $(2-x)$ であるから，収束するための必要十分条件は $\lvert 2-x\rvert<1$

$\lvert 2-x\rvert<1$ より $-1<2-x<1$

$1>x-2>-1$，$1<x<3$

その和は $\dfrac{1}{1-(2-x)}=\dfrac{1}{x-1}$

$1<x<3$ のとき，収束し，その和は $\dfrac{1}{x-1}$

問題　$1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\cdots$

数学Ⅲ　無限等比級数(応用) ① 課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　　)

1．次の点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

例題　数直線上で点 P が原点 O から正の向きに 1 進み，次に負の向きに $\frac{2}{3}$ 進み，さらに正の向きに $\frac{2^2}{3^2}$ 進む。このように正・負の移動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

点 P の座標は，順に次のようになる。

$1\,,\ 1-\frac{2}{3}\,,\ 1-\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}\,,\ 1-\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}-\frac{2^3}{3^3}$

初項 $a=1$, 公比 $r=-\frac{2}{3}$ の無限等比級数である。

$-1<r<1$ であるから収束し，その和は

$$\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

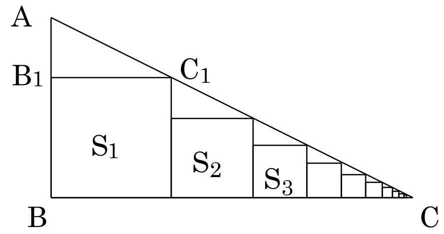
点 P が近づいていく点の座標は $\frac{3}{5}$

問題 ①　数直線上で点 P が原点 O から正の向きに 1 進み，次に負の向きに $\frac{3}{4}$ 進み，さらに正の向きに $\frac{3^2}{4^2}$ 進む。このように正・負の移動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

問題 ②　数直線上で点 P が原点 O から正の向きに 1 進み，次に正の向きに $\frac{1}{2}$ 進み，さらに正の向きに $\frac{1}{2^2}$ 進む。このように正の移動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

2．次の図形について答えよ。

例題　AB ＝ 4 , BC ＝ 8 , ∠ABC ＝ 90° の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 $S_1, S_2, \cdots$ をおく。この正方形の面積の和を求めよ。



S_1 の 1 辺の長さを x_1 とすると，$\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$

$4-x_1 : x_1 = 4:8 \qquad \therefore \quad x_1=\frac{8}{3}$

S_2 の 1 辺の長さを x_2 とすると，

$4:\frac{8}{3}=\frac{8}{3}:x_2 \qquad \therefore \quad x_2=\frac{16}{9}$

辺の長さの相似比は $\frac{8}{3}\div 4=\frac{2}{3}$

面積の相似比は $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

S_1 の面積は $\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

正方形の面積の総和は $\dfrac{\frac{16}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{16}{5}$

問題　AB ＝ 4 , BC ＝ 4 , ∠ABC ＝ 90° の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 $S_1, S_2, \cdots$ をおく。この正方形の面積の和を求めよ。

数学Ⅲ　無限等比級数(応用) ② 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　　)

1．次の点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

例題　座標平面上で点 P が原点 O から x 軸方向に進み，次に 90° 回転して $\frac{1}{2}$ 進み，さらに 90° 回転して $\frac{1}{2^2}$ 進む。このように回転して移動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

点 P の座標は，順に次のようになる。

$(1,0), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(1-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(1-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right), \cdots$

x 座標は，初項 1，公比 $-\frac{1}{4}$ の無限等比級数より収束し，その和は $\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$

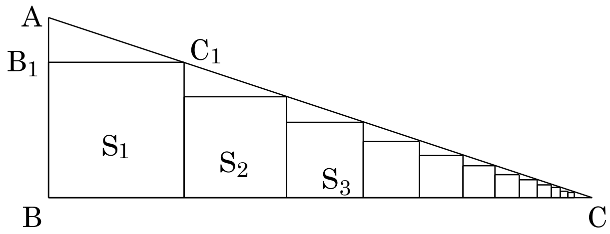
y 座標は，初項 $\frac{1}{2}$，公比 $-\frac{1}{4}$ の無限等比級数収束し，その和は $\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{5}$

点 P が近づいていく点の座標は $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$

問題　座標平面上で点 P が原点 O から y 軸方向に進み，次に −90° 回転して $\frac{2}{3}$ 進み，さらに −90° 回転して $\frac{2^2}{3^2}$ 進む。このように回転して移動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

2．次の図形について答えよ。

例題　AB ＝ 4，BC ＝ 12，∠ABC ＝ 90° の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 $S_1, S_2, \cdots$ をおく。この正方形の面積の和を求めよ。



S_1 の 1 辺の長さを x_1 とすると，$\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$

$4 - x_1 : x_1 = 4 : 12$　　$\therefore\ x_1 = 3$

S_2 の 1 辺の長さを x_2 とすると，

$4 : 3 = 3 : x_2$　　$\therefore\ x_2 = \frac{9}{4}$

辺の長さの相似比は $\frac{9}{4} \div 3 = \frac{3}{4}$

面積の相似比は $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

S_1 の面積は $3^2 = 9$

正方形の面積の総和は $\dfrac{9}{1-\frac{9}{16}} = \dfrac{144}{7}$

問題　AB ＝ 4，BC ＝ 6，∠ABC ＝ 90° の直角三角形の内部に辺 BC に接するように正方形 $S_1, S_2, \cdots$ をおく。この正方形の面積の和を求めよ。