数学Ⅲ　媒介変数表示 ① 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。

例題 $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 + 2t \end{cases}$

$x = t - 1$ より　$t = x + 1$

t を y の式に代入して

$y = (x + 1)^2 + 2(x + 1)$

$\quad = x^2 + 2x + 1 + 2x + 2$

よって　$y = x^2 + 6x + 3$

問題 $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + 4t \end{cases}$

2. 次の放物線の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

例題　$y = x^2 - 4tx + 4t$

放物線の式を変形し $y = (x - 2t)^2 - 4t^2 + 4t$

頂点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると $x = 2t$, $y = -4t^2 + 4t$

$t = \dfrac{x}{2}$ を y の式に代入して

$y = -4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 4\left(\dfrac{x}{2}\right) = -x^2 + 2x$

頂点 P が描く図形は 放物線　$y = -x^2 + 2x$

問題　$y = x^2 - 2tx + 2t$

3. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。

例題　$x = 4\cos\theta$

$\qquad y = 2\sin\theta$

$\cos\theta = \dfrac{x}{4}$,　$\sin\theta = \dfrac{y}{2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して

$\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = 1$

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

問題　$x = 3\cos\theta$

$\qquad y = 5\sin\theta$

4. 角 θ を媒介変数として，次の曲線を表せ。

例題①　$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

$x = 3\cos\theta$,　$y = 4\sin\theta$

問題①　$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

例題②　$\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

$\dfrac{x^2}{5^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

$x = \dfrac{5}{\cos\theta}$,　$y = 4\tan\theta$

問題②　$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

数学Ⅲ　媒介変数表示 ② 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。

例題 $\begin{cases} x = t^2 - 2t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$

$y = t + 1$ より　$t = y - 1$

t を y の式に代入して

$x = (y-1)^2 - 2(y-1) + 1$

$= y^2 - 2y + 1 - 2y + 2 + 1 = y^2 - 4y + 4$

よって　$x = y^2 - 4y + 4$　　※放物線

問題 $\begin{cases} x = t^2 + t - 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$

2．次の放物線の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

例題　$y = x^2 - 4tx - 4t^2$

放物線の式を変形し $y = (x - 2t)^2 - 8t^2$

頂点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると $x = 2t,\ y = -8t^2$

$t = \dfrac{x}{2}$ を y の式に代入して

$y = -8\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = -2x^2$

頂点 P が描く図形は 放物線　$y = -2x^2$

問題　$y = x^2 - 2tx + 3t^2$

3．媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。

例題　$x = \dfrac{2}{\cos\theta}$，$y = \tan\theta - 1$

$\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{x}{2}$，$\tan\theta = y + 1$ を

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$　に代入して

$1 + (y+1)^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

よって $\dfrac{x^2}{2^2} - (y+1)^2 = 1$　　※双曲線

問題　$x = \dfrac{1}{\cos\theta} + 2,\ y = 2\tan\theta$

4．角 θ を媒介変数として，次の曲線を表せ。

例題①　$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

$x = 5\cos\theta$，$y = 4\sin\theta$

問題①　$\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$

例題②　$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

$\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

$x = \dfrac{4}{\cos\theta}$，$y = 2\tan\theta$

問題②　$\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

数学Ⅲ　媒介変数表示 ③ 課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。

例題 $\begin{cases} x = \sqrt{t} - 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$

$x = \sqrt{t} - 1$ より　$t = (x+1)^2$　($x \geqq -1$ の部分)

t を y の式に代入して

$y = 2(x+1)^2 - 1$　($x \geqq -1$ の部分)

放物線　$y = 2(x+1)^2 - 1$ の　$x \geqq -1$ の部分

問題 $\begin{cases} x = \sqrt{t} - 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$

2. 次の放物線の頂点は，t の値が変化するとき，どのような曲線を描くか。

例題　$y = -x^2 - 4tx + 1$

式を変形し $y = -(x + 2t)^2 + 4t^2 + 1$

頂点を $\mathrm{P}(x, y)$ とすると $x = -2t$, $y = 4t^2 + 1$

$t = -\dfrac{x}{2}$ を y の式に代入して

$y = 4\left(-\dfrac{x}{2}\right)^2 + 1 = x^2 + 1$

頂点 P が描く図形は 放物線　$y = x^2 + 1$

問題　$y = -x^2 + 2tx + 2t$

3. 媒介変数表示された次の曲線の x, y の方程式を求めよ。

例題　$x = 3\cos\theta + 1$
$y = 4\sin\theta - 3$

$\cos\theta = \dfrac{x-1}{3}$,　$\sin\theta = \dfrac{y+3}{4}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して

$\left(\dfrac{y+3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{x-1}{3}\right)^2 = 1$

$\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

問題　$x = 3\cos\theta$
$y = 5\sin\theta$

4. 点 P が，次の曲線上を動くことを示せ。

例題　点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{\cos\theta},\ 3\tan\theta\right)$ が $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ 上を動くことを示せ。

$x = \dfrac{2}{\cos\theta}$, $y = 3\tan\theta$ とすると，

$\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta$

$= \dfrac{1 - \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$

よって，点 P は $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ 上を動く

問題　点 $\mathrm{P}(5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ が　$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ 上を動くことを示せ。