数学Ⅲ　ド・モアブルの定理 ① 課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1．次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題　$-1-i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$1- i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

問題　$\sqrt{3}-i$

2．次の値を求めよ。

n が整数のとき，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

例題　$(-1-i)^4$

$$1- i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \text{ より}$$

$$(-1-i)^4$$

$$= (\sqrt{2})^4\left\{\cos\left(4\times\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\times\frac{7\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= (\sqrt{2})^4(\cos 7\pi + i\sin 7\pi)$$

$$= 4\times(-1 + i\times 0) = -4$$

問題　$(\sqrt{3}-i)^3$

3．次の方程式を解け。

例題　$z^3 = -i$

z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$-i$ を極形式で表すと

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^3 = 1,\quad 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k\text{は整数})$$

$$r > 0 \text{ より } r = 1,\quad \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$k = 0, 1, 2$

よって　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6}$

極形式に代入し

$$z = i,\quad \frac{\sqrt{3}-i}{2},\quad \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

問題　$z^2 = 1 + i$

数学Ⅲ　ド・モアブルの定理 ② 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題　$1-\sqrt{3}\, i$

絶対値を r とすると

$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3}\,)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\quad \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \theta=\frac{5\pi}{3}$$

$$1-\sqrt{3}\, i=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

問題　$1-i$

2. 次の値を求めよ。

n が整数のとき，

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

例題　$\left(1-\sqrt{3}\, i\right)^3$

$1-\sqrt{3}\, i=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ より

$$\left(1-\sqrt{3}\, i\right)^3$$

$$=2^3\left\{\cos\left(3\times\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(3\times\frac{5\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=2^3\left(\cos 5\pi+i\sin 5\pi\right)$$

$$=8\times\left(-1+i\times 0\right)=-8$$

問題　$\left(1-i\right)^4$

3. 次の方程式を解け。

例題　$z^4=-4$

z の極形式を $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ とすると

$$z^4=r^4\left(\cos 4\theta+i\sin 4\theta\right)$$

-4 を極形式で表すと

$$-4=4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^4=4,\quad 4\theta=\pi+2k\pi\ \left(k は整数\right)$$

$r>0$ より $r=\sqrt{2}$，$\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$k=0,1,2,3$

よって　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}$

極形式に代入し

$$z=1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$$

問題　$z^3=-1$

数学Ⅲ　ド･モアブルの定理 ③ 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$

例題　$\sqrt{3} - i$

絶対値を r とすると

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$1 - \sqrt{3}\, i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

問題　$1 + i$

2. 次の値を求めよ。

n が整数のとき，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

例題　$(\sqrt{3} - i)^4$

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \text{ より}$$

$$(\sqrt{3} - i)^4$$

$$= 2^4\left\{\cos\left(4 \times \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(4 \times \frac{5\pi}{6}\right)\right\}$$

$$= 2^4\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$= 8\left(-1 - \sqrt{3}\, i\right)$$

問題　$(1 + i)^4$

3. 次の方程式を解け。

例題　$z^4 = 8\left(-1 - \sqrt{3}\, i\right)$

z の極形式を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とすると

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

$8\left(-1 - \sqrt{3}\, i\right)$ を極形式で表すと

$$8\left(-1 - \sqrt{3}\, i\right) = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

絶対値と偏角を比較し

$$r^4 = 16, \quad 4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$r > 0 \text{ より } r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$k = 0, 1, 2, 3$

よって　$\theta = \dfrac{\pi}{3}, \ \dfrac{5\pi}{6}, \ \dfrac{4\pi}{3}, \ \dfrac{11\pi}{6}$

極形式に代入し

$$z = 1 + \sqrt{3}\, i, \ -\sqrt{3} + i, \ -1 - \sqrt{3}\, i, \ \sqrt{3} - i$$

問題　$z^4 = -4$