数学Ⅱ　関数の最大･最小　課題　　（　）年（　）組（　）番（　　　　　　）

1．次の□を埋めて，文章を完成せよ。
Fill in the blanks below to complete the sentences.

関数 $y=-x^3-3x^2$　$(-3 \leqq x \leqq 2)$ のグラフの最大値と最小値を考える。

$y'=$ □ $=$ □ $x(x+$ □ $)$

$y'=0$ とすると, $x=$ □ より, 増減表を作る。
Derivative sign chart

x	-3	…	-2	…	0	…	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	-4	↗	0	↘	-20

極小値 □ $(x=$ □ $)$
Local minimum value

極大値 □ $(x=$ □ $)$
Local maximum value

端点 □ $(x=$ □ $)$, □ $(x=$ □ $)$
End point

$x=$ □ のとき，最大値 □ をとり，
Maximum value

$x=$ □ のとき，最小値 □ をとる。
Minimum value

2．次の関数の最大値と最小値を求めよ。
Find the maximum and minimum values of the following function.

例題　$y=2x^3-3x^2-12x$　$(-2 \leqq x \leqq 4)$

$y'=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると, $x=-1$, 2

$x=4$ のとき，最大値　32
maximum value

$x=2$ のとき，最小値　-20
minimum value

x	-2	…	-1	…	2	…	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-4	↗	7	↘	-20	↗	32

問題　$y=x^3-12x$　$(-3 \leqq x \leqq 4)$

x	
y'	
y	

3．厚紙で作る箱の容積を最大にするには，四隅から切り取る正方形の1辺の長さ x を何 cm にすればよいか。
What should be the length x of each side of the square cut from the 4 corners to maximize the volume of the cardboard box ?

例題　横 18 cm , 縦 18 cm の厚紙で箱を作る。
Make a box out of cardboard with a width of 18 cm and a height of 18 cm.

四隅から切り取る正方形の1辺の長さ x は

$x>0$, $18-2x>0$ の条件を満たす必要がある。

$0<x<9$ の範囲で容積 y の最大値を考える。

$y=(18-2x)(18-2x)x$

$=4x^3-72x^2+324x$

$y'=12x^2-144x+324$

$=12(x^2-12x+27)=12(x-3)(x-9)$

$x=3$ のとき $y=(18-2\times3)(18-2\times3)\times3=432$

$x=3$ cm のとき, 容積の最大値は 432 cm^3 になる。

x	0	…	3	…	9
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	432	↘	

問題　横 30 cm , 縦 30 cm の厚紙で箱を作る。

x	0	…		…	15
y'					
y					

数学Ⅱ　関数の最大･最小 2　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

1．次の［　　］を埋めて，文章を完成せよ。

関数 $y = x^3 - 3x$　$(-2 \leqq x \leqq 2)$ のグラフの最大値と最小値を考える。

$y' =$［　　　　］=［　　$(x-\quad)(x+\quad)$］

$y' = 0$ とすると，$x =$［　　　］より，増減表を作る。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

極小値［　　　$(x=\quad)$］，極大値［　　$(x=\quad)$］

端点［　　　$(x=\quad)$］，［　　　$(x=\quad)$］

$x =$［　　　　］のとき，最大値［　　　］をとり，

$x =$［　　　　］のとき，最小値［　　　］をとる。

2．次の関数の最大値と最小値を求めよ。

例題　$y = x^3 + 6x^2 + 9x$　$(-3 \leqq x \leqq 1)$

$y' = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+1)(x+3)$

$y' = 0$ とすると，$x = -1$，-3

$x = 1$ のとき，最大値　16

$x = -1$ のとき，最小値　-4

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
y'	0	$-$	0	$+$	
y	0	↘	-4	↗	16

問題　$y = x^3 - 6x^2 + 9x$　$(0 \leqq x \leqq 4)$

x	
y'	
y	

3．厚紙で作る箱の容積を最大にするには，四隅から切り取る正方形の 1 辺の長さ x を何 cm にすればよいか。

例題　横 32 cm，縦 20 cm の厚紙で箱を作る。

四隅から切り取る正方形の 1 辺の長さ x は

$x > 0$，$20 - 2x > 0$ の条件を満たす必要がある。

$0 < x < 10$ の範囲で容積 y の最大値を考える。

$y = (20 - 2x)(32 - 2x)x$

$\quad = 4x^3 - 104x^2 + 640x$

$y' = 12x^2 - 208x + 640$

$\quad = 4(x-4) = 4(x-4)(3x-40)$

$x = 4$ のとき $y = (20 - 2\times4)(32 - 2\times4)\times4 = 1152$

$x = 4$ cm のとき，容積の最大値は 1152 cm^3 になる。

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	10
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	1152	↘	

問題　横 24 cm，縦 15 cm の厚紙で箱を作る。

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'					
y					

数学Ⅱ　関数の最大･最小　3　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1．次の直円柱の体積 V の最大値を求めよ。

例題　底面の直径と高さの和が 12 cm である直円柱の体積を V cm^3 の最大値を求めよ。

底面の半径を x cm とすると，

高さは $12 - 2x$ cm , $0 < x < 6$ になる。

$V = \pi x^2 \times (12 - 2x) \quad = \pi(-2x^3 + 12x^2)$ (cm^3)

$V' = \pi(-6x^2 + 24x) \quad = -6\pi x(x - 4)$

体積の最大値は 64π cm^3 , 半径 4 cm , 高さ 4 cm

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	64π	↘	0

問題①　底面の直径と高さの和が 24 cm である直円柱の体積を V cm^3 の最大値を求めよ。

x					
V'					
V					

問題②　底面の直径と高さの和が 30 cm である直円錐の体積を V cm^3 の最大値を求めよ。

x					
V'					
V					

2．真上にボールを打ち上げるとき，最高の高さを求めよ。

例題　真上に 40 m／秒 の速さでボールを打ち上げると高さは $y = -5x^2 + 40x$ (m)になる。

$y' = -10x + 40 = 0$　になるのは $x = 4$

$x = 4$ のとき，$y = -5 \times 4^2 + 40 \times 4 = 80$

4 秒後に最高の高さ 80 m に達する。

($y = -5x^2 + 40x \qquad = -5(x^2 - 8x)$

$= -5\{(x - 4)^2 - 4^2\} \qquad = -5(x - 4)^2 + 80$)

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y	0	↗	80	↘

問題①　真上に 30 m／秒 の速さでボールを打ち上げると高さは $y = -5x^2 + 30x$ (m) になる。

x				
y'				
y				

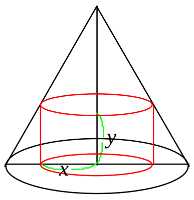
問題②　高さ 10 m の屋上から真上に 20 m／秒 の速さでボールを打ち上げると高さは $y = -5x^2 + 20 + 10$ (m) になる。

x				
y'				
y				

数学Ⅱ　関数の最大･最小　4　課題　　　　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　　)

1．次の直円柱の体積 V の最大値を求めよ。

例題　底面の直径が 6 cm, 高さが 12 cm の直円錐に内接する直円柱の体積 V の最大値を求めよ。



円柱の半径を x とすると

$0 < x < 6$ になる。

円柱の高さ y は

$y = 12 - 4x$

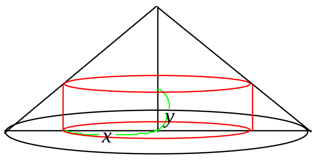
$V = \pi x^2 (12 - 4x) = -4\pi (x^3 - 3x^2)$

$V' = -4\pi (3x^2 - 6x) = -12\pi x(x - 2)$

体積の最大値は 16π cm^3, 半径 2 cm, 高さ 4 cm

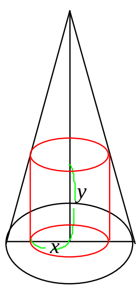
x	0	・・・	2	・・・	3
V'		＋	0	−	
V	0	↗	16π	↘	0

問題① 底面の直径が 12 cm, 高さが 6 cm の直円錐に内接する直円柱の体積 V の最大値を求めよ。



x	
V'	
V	

問題② 底面の直径が 6 cm, 高さが 18 cm の直円錐に内接する直円柱の体積 V の最大値を求めよ。



x	
V'	
V	

2．畑をロープで長方形に囲い，花畑を作るとき，花畑の面積の最大値を求めよ。

例題　100 m のロープで畑を長方形に囲い，花畑を作るとき，花畑の面積 S の最大値を求めよ。

畑の横を x，縦を y とする。

$x + y = 50$　より，$y = 50 - x$　$(0 < x < 50)$

$S = xy = x(50 - x) = -x^2 + 50x$

$S' = -2x + 50$

面積の最大値は 625 m^3, 横 25 m, 縦 25 m

x	0	・・・	25	・・・	50
S'		＋	0	−	
S	0	↗	625	↘	0

問題① 200 m のロープで畑を長方形に囲い，花畑を作るとき，花畑の面積 S の最大値を求めよ。

x	
S'	
S	

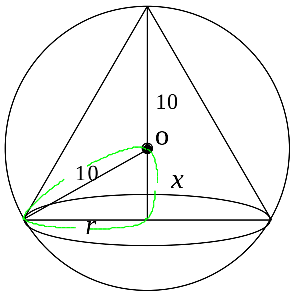
問題② 400 m のロープで畑を長方形に囲い，花畑を作るとき，花畑の面積 S の最大値を求めよ。

x	
S'	
S	

数学Ⅱ　関数の最大·最小　5　課題

(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

例題　半径 10 cm の 球 に内接する直 円 錐の体積 V の最大値を求めよ。



直 円 錐の底面と 球 の中 心の距離を x とする。

$0 < x < 10$　になる。

底面の半径を r とすると，三平方の定理より

$10^2 = r^2 + x^2$

$r > 0$ より, $r = \sqrt{10^2 - x^2}$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{10^2 - x^2}\right)^2(10 + x)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(-x^3 - 10x^2 + 100x + 1000\right)$$

$$V' = -\frac{1}{3}\pi\left(3x^2 + 20x - 100\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\pi(3x - 10)(x + 10)$$

$x = \frac{10}{3}$ のとき，$V' = 0$，V は最大になる。

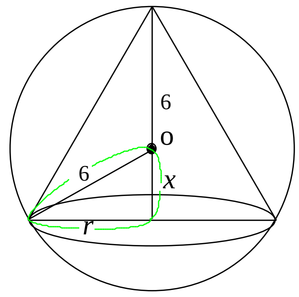
$$V = \frac{1}{3}\pi\left\{-\left(\frac{10}{3}\right)^3 + 20\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 100 \times \frac{10}{3} + 1000\right\}$$

$$= \frac{32000}{81}\pi$$

体積の最大値は　$\frac{32000}{81}\pi$　cm^3

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	10
V'		+	0	−	
V	0	↗	$\frac{320000}{81}\pi$	↘	0

問題　半径 6 cm の 球 に内接する直 円 錐の体積 V の最大値を求めよ。



直 円 錐の底面と 球 の中 心の距離を x とする。

x	
V'	
V	