

1. 次の計算をなさい。

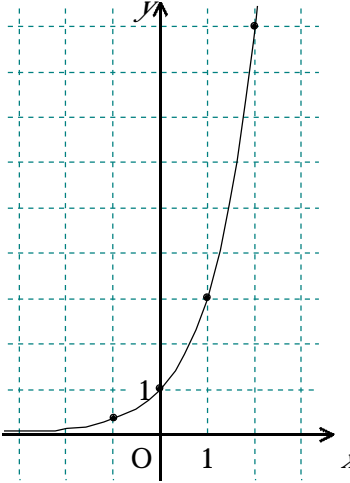
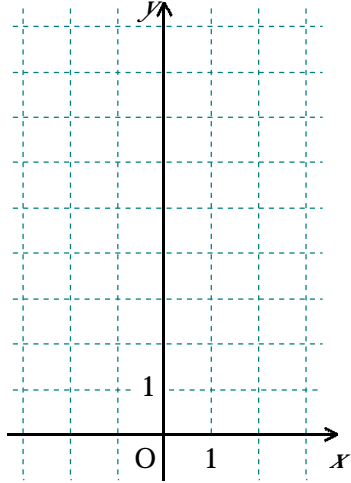
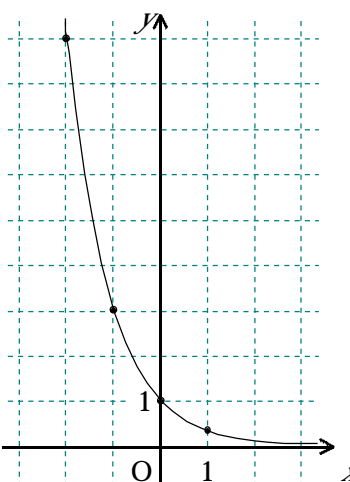
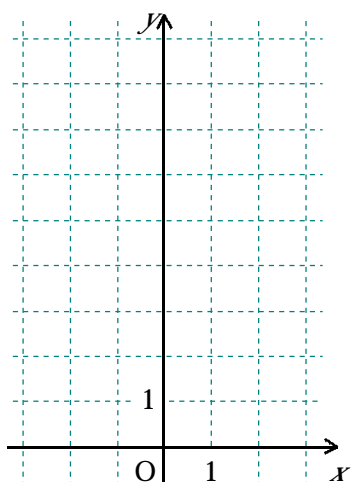
Calculate the following expression.
3. 次の数を小さい方から順に並べなさい。

Arrange the following numbers in order from smallest to largest.

例題	問題
$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$	2^3
$3^2 = 3 \times 3 = 9$	2^2
$3^1 = 3$	2^1
$3^0 = 1$	2^0
$3^{-1} = \frac{1}{3} \quad 0.33$	2^{-1}
$3^{-2} = \frac{1}{9} \quad 0.11$	2^{-2}

2. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.

例題	問題
<div>$y = 3^x$</div>  <div>漸近線は x 軸 ($y = 0$)</div>	<div>$y = 2^x$</div> 
<div>$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$</div> <div>$= 3^{-x}$</div>  <div>漸近線は x 軸 ($y = 0$)</div>	<div>$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$</div> 

グラフが限りなく近づく直線が存在するとき、その直線を漸近線という。

例題	問題
<div>$4^{-1}, 4^{\frac{3}{2}}, 4^0$</div> <div>指数の大小を調べると</div> <div>$-1 < 0 < \frac{3}{2}$</div> <div>底 4 は 1 より大きい。</div> <div>$(y = 4^x \text{ は単調増加})$</div> <div>$4^{-1}, 4^0, 4^{\frac{3}{2}}$</div>	<div>$9^{-1}, 9^{\frac{1}{2}}, 9^1$</div>
<div>$\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^0$</div> <div>指数の大小を調べると</div> <div>$-1 < 0 < 2$</div> <div>底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さい</div> <div>$(y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ は単調減少})$</div> <div>$\left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$</div>	<div>$\left(\frac{1}{4}\right)^0, \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{4}\right)^3$</div>

4. 次の方程式を解きなさい。

Solve the following equation.

例題	問題
<div>$4^x = 32$</div> <div>$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$</div> <div>$32 = 2^5 \quad \text{より}$</div> <div>$2x = 5$</div> <div>$x = \frac{5}{2}$</div>	<div>$8^x = 16$</div>
<div>$5^{2x} = \frac{1}{125}$</div> <div>$\frac{1}{125} = 5^{-3} \quad \text{より}$</div> <div>$2x = -3$</div> <div>$x = -\frac{3}{2}$</div>	<div>$3^{2x} = \frac{1}{243}$</div>

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき、 $y = a^x$ で表される関数を a を底とする x の指数関数という。

1. 次の計算をなさい。

Calculate the following expression.

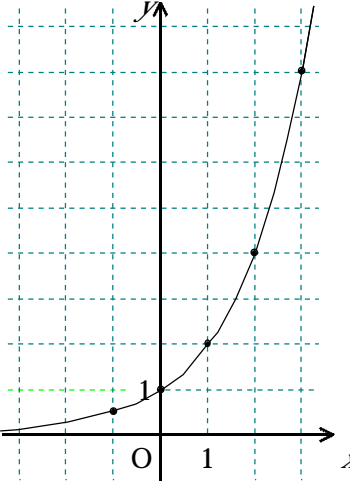
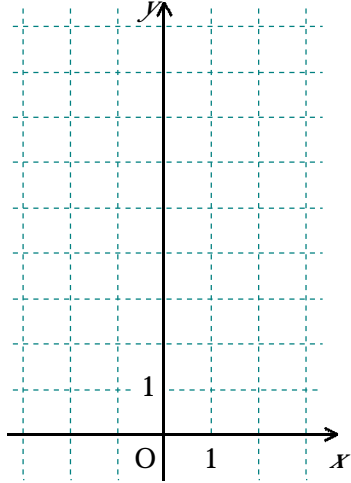
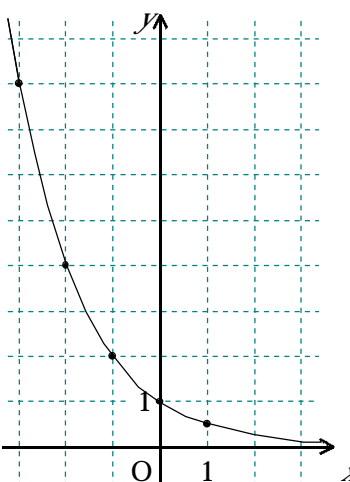
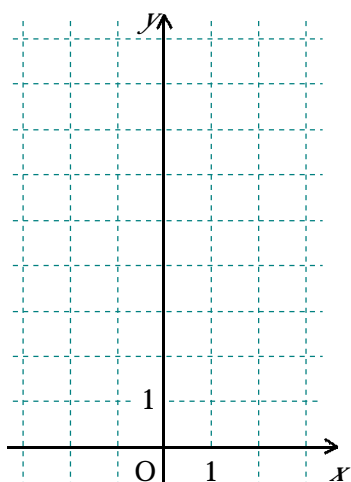
3. 次の数を小さい方から順に並べなさい。

Arrange the following numbers in order from smallest to largest.

例題	問題
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$	3^3
$2^2 = 2 \times 2 = 4$	3^2
$2^1 = 2$	3^1
$2^0 = 1$	3^0
$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$	3^{-1}
$2^{-2} = \frac{1}{4} = 0.25$	3^{-2}

2. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.

例題	問題
<div>$y = 2^x$</div>  <div>漸近線は x 軸 ($y = 0$)</div>	<div>$y = 3^x$</div> 
<div>$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$</div> <div>$= 2^{-x}$</div>  <div>漸近線は x 軸 ($y = 0$)</div>	<div>$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$</div> 

グラフが限りなく近づく直線が存在するとき、その直線を漸近線という。

例題	問題
<div>$9^{-2}, 9^{\frac{1}{2}}, 9^2$</div> <div>指数の大小を調べると</div> <div>$-2 < \frac{1}{2} < 2$</div> <div>底9は1より大きい。 ($y = 9^x$は単調増加)</div> <div>$9^{-1}, 9^{\frac{1}{2}}, 9^2$</div>	<div>$8^{-1}, 8^{\frac{4}{3}}, 8^1$</div>
<div>$\left(\frac{1}{3}\right)^1, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{3}\right)^0$</div> <div>指数の大小を調べると</div> <div>$-2 < 0 < 1$</div> <div>底$\frac{1}{3}$は1より小さい ($y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$は単調減少)</div> <div>$\left(\frac{1}{3}\right)^1, \left(\frac{1}{3}\right)^0, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$</div>	<div>$\left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^2$</div>

4. 次の方程式を解きなさい。

Solve the following equation.

例題	問題
<div>$9^x = 27$</div> <div>$9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$</div> <div>$27 = 3^3$ より</div> <div>$2x = 3$</div> <div>$x = \frac{3}{2}$</div>	<div>$4^x = 32$</div>
<div>$2^{2x} = \frac{1}{8}$</div> <div>$\frac{1}{8} = 2^{-3}$ より</div> <div>$2x = -3$</div> <div>$x = -\frac{3}{2}$</div>	<div>$3^{2x} = \frac{1}{27}$</div>

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき、 $y = a^x$ で表される関数を a を底とする x の指数関数という。

1. 次の計算をなさい。

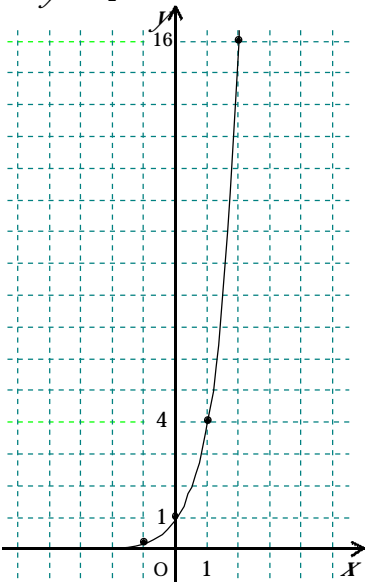
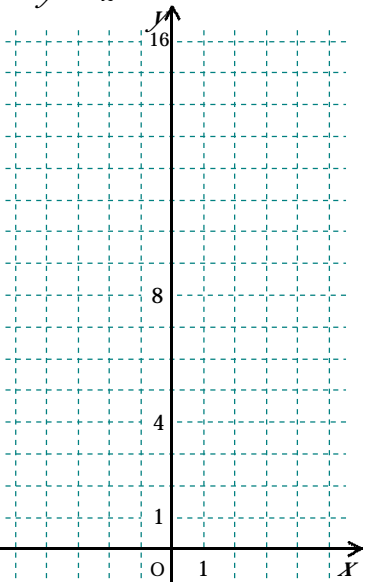
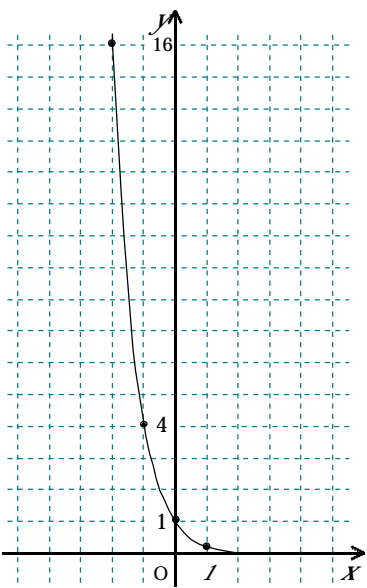
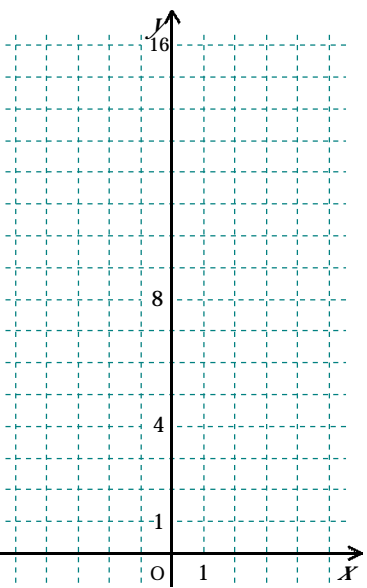
Calculate the following expression.
3. 次の数を小さい方から順に並べなさい。

Arrange the following numbers in order from smallest to largest.

例題	問題
$4^2 = 4 \times 4 = 16$	2^2
$4^1 = 4$	2^1
$4^0 = 1$	2^0
$4^{-1} = \frac{1}{4} = 0.25$	2^{-1}
$4^{-2} = \frac{1}{16} = 0.06$	2^{-2}

2. 次のグラフを描きなさい。

Draw the following graph.

例題	問題
<div>$y = 4^x$</div>  <div>漸近線は x 軸 ($y = 0$)</div>	<div>$y = 2^x$</div> 
<div>$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$</div> <div>$= 4^{-x}$</div>  <div>漸近線は x 軸 ($y = 0$)</div>	<div>$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$</div> 

例題	問題
<div>$4^{-2}, 4^{\frac{5}{2}}, 4^2$</div> <div>指数の大小を調べると</div> <div>$-2 < 2 < \frac{5}{2}$</div> <div>底4は1より大きい。</div> <div>$(y = 4^x \text{ は単調増加})$</div> <div>$4^{-1}, 4^2, 4^{\frac{5}{2}}$</div>	<div>$25^{-1}, 25^{\frac{1}{2}}, 25^1$</div>
<div>$\left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{5}\right)^0$</div> <div>指数の大小を調べると</div> <div>$-2 < 0 < 2$</div> <div>底 $\frac{1}{5}$ は1より小さい</div> <div>$(y = \left(\frac{1}{5}\right)^x \text{ は単調減少})$</div> <div>$\left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^0, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$</div>	<div>$\left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$</div>

4. 次の方程式を解きなさい。

Solve the following equation.

例題	問題
<div>$8^x = 32$</div> <div>$8^x = (2^3)^x = 2^{3x}$</div> <div>$32 = 2^5$ より</div> <div>$3x = 5$</div> <div>$x = \frac{5}{3}$</div>	<div>$16^x = 8$</div>
<div>$2^{2x} = \frac{1}{16}$</div> <div>$\frac{1}{16} = 2^{-4}$ より</div> <div>$2x = -4$</div> <div>$x = -2$</div>	<div>$3^{2x} = \frac{1}{9}$</div>

グラフが限りなく近づく直線が存在するとき、その直線を漸近線という。

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき、 $y = a^x$ で表される関数を a を底とする x の指数関数という。

1. 次の指数方程式を解きなさい。

Solve the following exponential equation.
3. 次の指数不等式を解きなさい。

Solve the following exponential inequality.

例題

$$2^{2x+1} = 4$$
$$2^{2x+1} = 2^2 \quad \text{より} \quad 2x+1=2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

問題

$$3^{2x-1} = 1$$

例題

$$2 \times 2^{2x} + 3 \times 2^x - 2 = 0$$
$$2^x = t \text{ とおくと, } t > 0$$
$$2 \times 2^{2x} + 3 \times 2^x - 2 = 2t^2 + 3t - 2 = (2t-1)(t+1) = 0$$
$$t > 0 \quad \text{より} \quad t = \frac{1}{2} = 2^x$$
$$\text{よって } x = -1$$

問題

$$3 \times 3^{2x} - 2 \times 3^x - 1 = 0$$

例題

$$9^x - 3^x - 6 > 0$$
$$3^x = t \text{ とおくと, } t > 0$$
$$9^x - 3^x - 6 = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2) > 0$$
$$\text{よって, } t > 3, t < -4$$
$$t > 0 \text{ であるので } t > 3 \text{ になる。}$$
$$\text{したがって, } 3^x > 3 \text{ より } \underline{x > 1}$$

問題

$$4^x - 2^x - 12 > 0$$

2. 次の関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。

If the following function has a maximum or minimum value, find that value.
4. 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

Express the magnitude of the following numbers using inequality signs.

例題

$$y = 4^x - 2^{x+2}$$
$$y = 4^x - 2^{x+2} = 2^{2x} - 4 \times 2^x$$
$$2^x = t \text{ とおくと, } t > 0$$
$$y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$$
$$\text{最小値 } -4 \quad t = 2, x = 1$$

問題

$$y = 9^x - 2 \times 3^x$$

例題

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}$$
$$(\sqrt{3})^6 = 27, (\sqrt[3]{5})^6 = 25 \quad \text{より}$$
$$\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$$
$$(\sqrt[3]{5})^{12} = 625, (\sqrt[4]{7})^{12} = 343 \quad \text{より}$$
$$\sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{7} \quad \text{より}$$
$$\text{したがって, } \sqrt{3} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[4]{7}$$

問題

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$$

1. 次の指数方程式を解きなさい。
Solve the following exponential equation.

3. 次の指数不等式を解きなさい。
Solve the following exponential inequality.

例題

$2^{2x+1} = 1$
 $2^{2x+1} = 2^0$ より $2x+1=0$
 $x = -\frac{1}{2}$

問題

$3^{3x-1} = 1$

例題

$3^{2x} + 2 \times 3^x - 3 = 0$
 $3^x = t$ とおくと, $t > 0$
 $3^{2x} + 2 \times 3^x - 3 = t^2 + 2t - 3 = (t-1)(t+3) = 0$
 $t > 0$ より $t = 1 = 3^x$
よって $x = 0$

問題

$2^{2x} - 3 \times 2^x - 4 = 0$

例題

$4^x - 2^{x+1} - 8 < 0$
 $2^x = t$ とおくと, $t > 0$
 $4^x - 2^{x+1} - 8 = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2) < 0$
よって, $-2 < t < 4$
 $t > 0$ であるので $0 < t < 4$ になる。
したがって, $0 < 2^x < 4$ より $x < 2$

問題

$9^x + 3^{x+1} - 18 < 0$

2. 次の関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。
If the following function has a maximum or minimum value, find that value.

4. 次の数の大小を不等号を用いて表せ。
Express the magnitude of the following numbers using inequality signs.

例題

$y = -9^x + 6 \times 3^x$
 $y = -9^x + 6 \times 3^x = -3^{2x} + 6 \times 3^x$
 $3^x = t$ とおくと, $t > 0$
 $y = -t^2 + 6t = -(t-3)^2 + 9$
最大値 9 $t = 3$, $x = 1$

問題

$y = -4^x + 4 \times 2^x$

例題

$\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[4]{30}$
 $(\sqrt{5})^6 = 125$, $(\sqrt[3]{10})^6 = 100$ より
 $\sqrt{5} > \sqrt[3]{10}$
 $(\sqrt{5})^4 = 25$, $(\sqrt[4]{30})^4 = 30$ より
 $\sqrt{5} < \sqrt[4]{30}$ より
したがって, $\sqrt[3]{10} < \sqrt{5} < \sqrt[4]{30}$

問題

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{8}$

1 . 次の指数方程式を解きなさい。
Solve the following exponential equation.

3 . 次の指数不等式を解きなさい。
Solve the following exponential inequality.

例題

$$2^{3x-1} = 4$$
$$2^{3x-1} = 2^2 \quad \text{より} \quad 3x-1=2$$
$$x=1$$

問題

$$3^{2x-1} = 9$$

例題

$$2^{2x} - 5 \times 2^x - 4 = 0$$
$$2^x = t \text{ とおくと, } t > 0$$
$$2^{2x} - 5 \times 2^x - 4 = t^2 - 5t - 4 = (t-4)(t+1) = 0$$
$$t > 0 \quad \text{より} \quad t = 4 = 2^x$$
$$\text{よって } x = 2$$

問題

$$3^{2x} - 3^x - 6 = 0$$

例題

$$4^x - 2^x - 2 > 0$$
$$2^x = t \text{ とおくと, } t > 0$$
$$4^x - 2^x - 2 = t^2 - t - 2$$
$$= (t-2)(t+1) > 0$$
$$\text{よって, } t < -1, 2 < t$$
$$t > 0 \text{ であるので } t > 2 \text{ になる。}$$
$$\text{したがって, } 2^x > 2 = 2^1 \text{ より } \underline{x > 1}$$

問題

$$9^x + 3^x - 2 > 0$$

2 . 次の関数に最大値, 最小値があれば, それを求めよ。
If the following function has a maximum or minimum value, find that value.

4 . 次の数の大 小 を不等号を用いて表 せ。
Express the magnitude of the following numbers using inequality signs.

例題

$$y = 4^x - 2^{x+1}$$
$$y = 4^x - 2^{x+1} = 2^{2x} - 2 \times 2^x$$
$$2^x = t \text{ とおくと, } t > 0$$
$$y = t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1$$
$$\text{最小値 } -1 \quad t = 1, x = 0$$

問題

$$y = 4^x - 2^{x+3}$$

例題

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{5}$$
$$(\sqrt{2})^6 = 8, \quad (\sqrt[3]{3})^6 = 9 \quad \text{より}$$
$$\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$$
$$(\sqrt{2})^4 = 4, \quad (\sqrt[4]{5})^4 = 5 \quad \text{より}$$
$$\sqrt{2} < \sqrt[4]{5}$$
$$\text{したがって, } \sqrt[3]{3} < \sqrt{2} < \sqrt[4]{5}$$

問題

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{6}$$

1. 次の式の値を求めよ。 Find the value of the following expression.

例題 $2^x + 2^{-x} = 3$ のとき、 $8^x + 8^{-x}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}(2^x + 2^{-x})^2 &= (2^x)^2 + 2(2^x)(2^{-x}) + (2^{-x})^2 \\&= 2^{2x} + 2 + 2^{-2x} \\&= 3^2 = 9\end{aligned}$$

よって、 $2^{2x} + 2^{-2x} = 7$

$$\begin{aligned}8^x + 8^{-x} &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 \\&= (2^x + 2^{-x})(2^{2x} - 2^x \times 2^{-x} + 2^{-2x}) \\&= 3(7 - 1) = \underline{18}\end{aligned}$$

(別解) $2^x = t$ とおき、

$$t + \frac{1}{t} = 3 \text{ のとき、} t^3 + \frac{1}{t^3} \text{ の値を求めよ。}$$
$$t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$
$$t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \left(t^2 - t \times \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$$
$$= 3(7 - 1) = 18$$

よって、 $8^x + 8^{-x} = \underline{18}$

問題 $3^x + 3^{-x} = 2$ のとき、 $27^x + 27^{-x}$ を求めよ。

2. 次の方程式を解け。 Solve the following equation.

例題 $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$

$$\begin{aligned}4^x + 2^{x+1} - 8 &= (2^x)^2 + 2 \times 2^x - 8 \\&= (2^x - 2)(2^x + 4) = 0 \\2^x &= 2 \text{ または } 2^x = -4 \\2^x > 0 \text{ であるので } 2^x &= 2, x = \underline{1}\end{aligned}$$

問題 $4^x - 2^{x+2} - 3 = 0$

3. 次の式の値の範囲を求めよ。 Find the range of values for the following expression.

例題 $y = 4^{x+1} + 2^{x+3} + 1$ のとり得る値の範囲を求めよ。

$$\begin{aligned}2^x &= t \text{ とおくと、} t > 0 \\y &= 4^{x+1} + 2^{x+3} + 1 \\&= 4 \times 2^{2x} + 8 \times 2^x + 1 \\&= 4t^2 + 8t + 1 \\&= 4(t+1)^2 - 3\end{aligned}$$

このグラフの頂点は $(-1, -3)$ であるが $t > 0$ であるので、 $y > 1$

問題 $y = 4^x + 2^{x+2} + 1$ のとり得る値の範囲を求めよ。