数学Ⅰ　三角形の辺と角 課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　)

1. △ABC の残りの辺の長さと，角の大きさを求めよ。
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.

例題　$a = 2$，$b = 1+\sqrt{3}$，$C = 60^\circ$

余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$= 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\times 2\times(1+\sqrt{3})\times\cos 60^\circ$$
$$= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} = 6$$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{6}$

正弦定理より

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$
$$= \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $A = 45^\circ$　($A = 135^\circ$ は不適)

$B = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$

$c = \sqrt{6}$，$A = 45^\circ$，$B = 75^\circ$

問題　$a = \sqrt{2}$，$b = 1+\sqrt{3}$，$C = 45^\circ$

2. △ABC の最大の角の大きさを求めよ。
Find the size of the largest angle of triangle △ABC.

例題　$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 8 : 13$

正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

よって，

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 7 : 8 : 13$$

このとき，正の数 k を用いると

$$a = 7k,\quad b = 8k,\quad c = 13k$$

と表すことができる。

c が最大の辺であるから，C が最大の角になる。

余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(7k)^2 + (8k)^2 - (13k)^2}{2\times 7k\times 8k}$$
$$= \frac{-56k^2}{112k^2} = -\frac{1}{2}$$

より　$C = 120^\circ$

問題　$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$

数学Ⅰ　三角形の辺と角 2　課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. △ABC の残りの辺の長さと，角の大きさを求めよ。
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.

例題　$a = 2$，$b = \sqrt{3} - 1$，$C = 120^\circ$

余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$= 2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2 \times 2 \times (\sqrt{3}-1) \times \cos 60^\circ$$
$$= 4 + 4 - 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} = 6$$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{6}$

正弦定理より

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$
$$= \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$A = 45^\circ$，　($A = 135^\circ$ は不適)

$B = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

$c = \sqrt{6}$，$A = 45^\circ$，$B = 15^\circ$

問題　$a = 2$，$b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，$C = 135^\circ$

2. 次の等式が成り立つとき，△ABC はどのような三角形であるか。
What kind of triangle is △ABC when the following equation holds true?

例題　$\sin A = 2\sin B \times \cos C$

正弦定理より　$\sin A = \dfrac{a}{2R}$，　$\sin B = \dfrac{b}{2R}$

余弦定理より　$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

よって，代入すると

$$\frac{a}{2R} = 2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

両辺に $2aR$ を掛けると

$$a^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

ゆえに　$b^2 = c^2$

△ABC は $b = c$ の二等辺三角形である。

問題①　$b\sin B = c\sin C$

問題②　$\sin A \times \cos B = \sin B \times \cos A$

数学Ⅰ　三角形の辺と角 3 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

1. △ABC の残りの辺の長さと，角の大きさを求めよ。
Find the length of the remaining sides and the size of the angle of △ABC.

例題　$a = 2$，$b = 1 + \sqrt{3}$，$C = 30^\circ$

余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$= 2^2 + \left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times 2 \times \left(1+\sqrt{3}\right) \times \cos 30^\circ$$
$$= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 6 = 2$$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{2}$

正弦定理より

$$2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$
$$= \sqrt{2} \div \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$
$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $A = 45^\circ$　(B が最大より $A = 135^\circ$ は不適)

$B = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

$c = \sqrt{2}$，$A = 45^\circ$，$B = 105^\circ$

問題　$a = \sqrt{2}$，$b = \sqrt{3} - 1$，$C = 135^\circ$

2. △ABC の最大の角の大きさを求めよ。
Find the size of the largest angle of triangle △ABC.

例題　$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : 2 : \sqrt{7}$

正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

よって，

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{7}$$

このとき，正の数 k を用いると

$$a = k,\quad b = 2k,\quad c = \sqrt{7}k$$

と表すことができる。

c が最大の辺であるから，C が最大の角になる。

余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{k^2 + (2k)^2 - (\sqrt{7}k)^2}{2 \times k \times 2k}$$
$$= \frac{-2k^2}{4k^2} = -\frac{1}{2}$$

より　$C = 120^\circ$

問題　$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$

数学Ⅰ　三角形の辺と角(円と内接)　課題　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　　)

1. △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

Find the radius r of the inscribed circle of △ABC.

例題　$b = 7$，$c = 8$，$A = 120^\circ$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$= 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 49 + 64 + 56 = 169$$

$a > 0$ より　$a = \sqrt{169} = 13$

△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 14\sqrt{3}$$

内接円の半径 r を利用すると

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)r = \frac{1}{2}(13 + 7 + 8)r$$
$$= 14r$$

よって，　$14r = 14\sqrt{3}$ より

内接円の半径 $r = \sqrt{3}$

問題　$b = 10$，$c = 6$，$A = 120^\circ$

2. 円に内接する四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

Find the area S of □ABCD inscribed in the circle.

例題　AB = 8, BC = 3, CD = 5, DA = 3 の円に内接する四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$$\cos C = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

△ABD に余弦定理を用いて，

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos A$$
$$= 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos A$$
$$= 73 - 48\cos A$$

△BCD に余弦定理を用いて，

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \times \cos C$$
$$= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos C$$
$$= 34 - 30\cos C = 34 + 30\cos A$$

$73 - 48\cos A = 34 + 30\cos A$ より $\cos A = \frac{1}{2}$

よって，$A = 60^\circ$，　$C = 120^\circ$

$$S = \triangle ABC + \triangle BCD$$
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{39\sqrt{3}}{4}$$

問題　AB = 8, BC = 5, CD = 3, DA = 5 の円に内接する四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

数学Ⅰ　三角形の辺と角(円と内接) 2 課題　　( )年( )組( )番( )

1. △ABC の内接円の半径 r を求めよ。
Find the radius r of the inscribed circle of △ABC.

例題　$a=10$, $b=17$, $c=21$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{17^2+21^2-10^2}{2\times17\times21}$$

$$=\frac{630}{714}=\frac{15}{17}$$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{15}{17}\right)^2=\frac{64}{289}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{\frac{64}{289}}=\frac{8}{17}$

△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times17\times21\times\frac{8}{17}=84$$

内接円の半径 r を利用すると

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

$$=\frac{1}{2}(10+17+21)r=24r$$

よって，$24r=84$ より　$r=\frac{7}{2}=3.5$

内接円の半径 $r=3.5$

問題　$a=7$, $b=15$, $c=20$

2. 円に内接する四角形 ABCD の面積 S を求めよ。
Find the area S of □ABCD inscribed in the circle.

例題　AB $=8$, BC $=2$, CD $=6$, DA $=2$ の円に内接する四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

円に内接する四角形の対角の和は$180°$であるから

$\cos C=\cos(180°-A)=-\cos A$

△ABD に余弦定理を用いて，

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}\times\cos A$$

$$=8^2+2^2-2\times8\times2\times\cos A$$

$$=68-32\cos A$$

△BCD に余弦定理を用いて，

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\times\mathrm{BC}\times\mathrm{CD}\times\cos C$$

$$=2^2+6^2-2\times2\times6\times\cos C$$

$$=40-24\cos C=40+24\cos A$$

$68-32\cos A=40+24\cos A$ より　$\cos A=\frac{1}{2}$

よって，　$A=60°$，$C=120°$

$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{BCD}$

$$=\frac{1}{2}\times8\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=14\sqrt{3}$$

問題　AB $=3$, BC $=3$, CD $=4$, DA $=4$ の円に内接する四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

数学Ⅰ　三角形の辺と角(円と内接) 3 課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　)

1. △ABC の内接円の半径 r を求めよ。
Find the radius r of the inscribed circle of △ABC.

例題　$a = 13$, $b = 11$, $c = 20$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{11^2 + 20^2 - 13^2}{2 \times 11 \times 20}$$

$$= \frac{352}{440} = \frac{4}{5}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$\sin A > 0$ より $\sin A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} \times 11 \times 20 \times \frac{3}{5} = 66$$

内接円の半径 r を利用すると

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) r$$

$$= \frac{1}{2}(13 + 11 + 20) r = 22r$$

よって，$22r = 66$ より　$r = 3$

内接円の半径 $r = 3$

問題　$a = 7$, $b = 24$, $c = 25$

2. 円に内接する四角形 ABCD の面積 S を求めよ。
Find the area S of □ABCD inscribed in the circle.

例題　AB = 1, BC = 2, CD = 2, ∠B = 120° の円に内接する四角形 ABCD の辺 AD を求めよ。

△ABC に余弦定理を用いて，

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos B$$

$$= 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 120^\circ$$

$$= 5 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

$AC > 0$ より $AC = \sqrt{7}$

△ADC に余弦定理を用いて，

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \times AD \times CD \times \cos D$$

$$= x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 \times \cos 60^\circ$$

$$= x^2 + 4 - 4x \times \frac{1}{2} = 7$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0$$

$x = -1, 3$　　$x > 0$ より　$x = AD = 3$

問題　AB = 3, BC = 8, CD = 3, ∠B = 60° の円に内接する四角形 ABCD の辺 AD を求めよ。