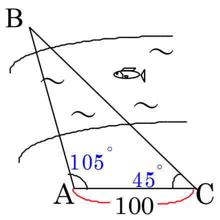
数学Ⅰ　空間図形　課題　　　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　　)

例題① 川の両岸に2点 A , B がある。A 地点から 100 m 離れた地点を C とする。∠A=105°，∠C=45° のとき，AB 間の距離を求めよ。



$\angle B = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$

正弦定理より

$$2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{100}{\sin 30^\circ}$$

$$= 100 \div \frac{1}{2} = 200$$

$$AB = 2R \times \sin C = 200 \times \sin 45^\circ$$

$$= 200 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2}$$

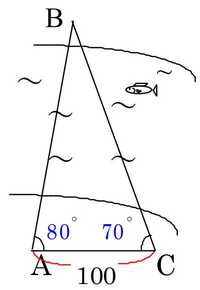
$$\fallingdotseq 100 \times 1.414 = 141.4$$

$$\fallingdotseq \underline{141}\ \text{(m)}$$

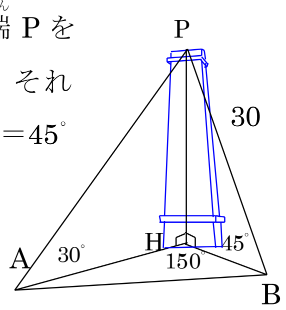
There are two points A and B on both sides of the river.
Let C be a point 100m away from point A.
Find the distance between AB when ∠A=105° and ∠C=45°.

問題① 川の両岸に2点 A , B がある。A 地点から 100 m 離れた地点を C とする。∠A=80°，∠C=70° のとき，AB 間の距離を求めよ。

$\sin 70^\circ = 0.9397$



例題② 高さが 30m の煙突 PH の先端 P を2地点 A, B から見上げると，それぞれ，∠PAH =30°，∠PBH =45° ∠AHB = 150° であった。AB 間の距離を求めよ。



※$\sqrt{7} \fallingdotseq 2.65$

△AHP において

$$\tan\angle APH = \frac{AH}{PH},\quad AH = PH \times \tan\angle APH$$

$$AH = 30 \times \tan 60^\circ = 30 \times \sqrt{3} = 30\sqrt{3}$$

△BHP において

$$\tan\angle BPH = \frac{BH}{PH},\quad BH = PH \times \tan\angle BPH$$

$$BH = 30 \times \tan 45^\circ = 30 \times 1 = 30$$

△APB において，余弦定理より

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 - 2 \times AH \times BH \times \cos\angle AHB$$

$$= (30\sqrt{3})^2 + 30^2 - 2 \times 30 \times 30\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

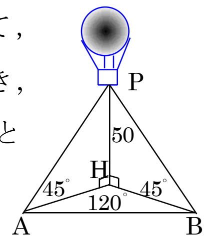
$$= 2700 + 900 + 2700 = 6300$$

$AB > 0$ より，　$AB = \sqrt{6300} = 30\sqrt{7}$

$$\fallingdotseq 30 \times 2.65 = 7.95 \fallingdotseq \underline{8}\ \text{(m)}$$

When looking up at the tip P of a chimney PH with a height of 30 m from two points A and B, ∠PAH = 30°, ∠PBH = 45°, and ∠AHB = 150°.
Find the distance between AB.

問題② イベントで熱気球 P が上昇して，地上からの高さ PH が 50m のとき，地上の2地点 A, B で角度を測ると ∠PAH = 45°，∠PBH = 45° ∠AHB = 120° であった。AB 間の距離を求めよ。

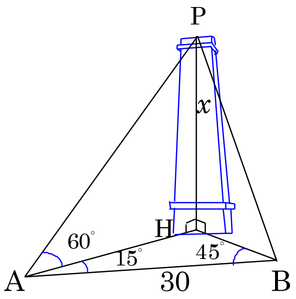


数学Ⅰ　空間図形 2 課題　　(　　)年(　　)組(　　)番(　　　　　　　　)

例題 ①　$\angle PAH = 60^\circ$, $\angle BAH = 15^\circ$

$\angle ABH = 45^\circ$, $AB = 30$ m

であるとき，煙突の高さを求めよ。※$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$



$\angle AHB = 180^\circ - (15^\circ + 45^\circ) = 120^\circ$

正弦定理より

$$2R = \frac{AB}{\sin \angle AHB} = \frac{30}{\sin 120^\circ}$$

$$= 30 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 30 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$$

$$AH = 2R \times \sin B = 20\sqrt{3} \times \sin 45^\circ$$

$$= 20\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{6}$$

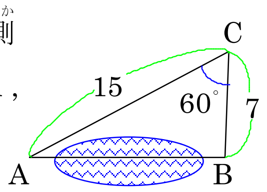
$$\tan 60^\circ = \frac{PH}{AH}, \quad PH = AH \times \tan 60^\circ$$

$$PH = 10\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{18} = 30\sqrt{2}$$

$$\fallingdotseq 30 \times 1.41 = 42.3 \fallingdotseq \underline{\underline{42\ (m)}}$$

∠ PAH=60°, ∠ BAH=15°, ∠ ABH=45°, AB=30m.
Find the height PH of the chimney.

例題 ②　C 地点から池の両側に立つ木 A, B までの距離と $\angle ACB$ を測ると，$AC = 15$ m, $AB = 7$ m，$\angle ACB = 60^\circ$ であった。距離 AB を求めよ。



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$= 7^2 + 15^2 - 2 \times 7 \times 15 \times \frac{1}{2}$$

$$= 49 + 225 - 105 = 169$$

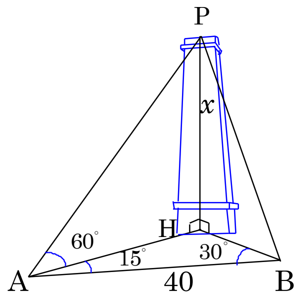
$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{169} = \underline{\underline{13\ (m)}}$$

When we measured the distance and ∠ACB from point C to trees A and B standing on both sides of the pond, we found that AC=15m, AB=7m, and ∠ACB=60°.　Find the distance AB.

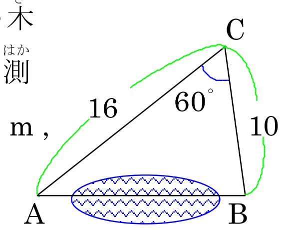
問題 ①　$\angle PAH = 60^\circ$, $\angle BAH = 15^\circ$

$\angle ABH = 30^\circ$, $AB = 40$ m

であるとき，煙突の高さを求めよ。※$\sqrt{6} \fallingdotseq 2.45$

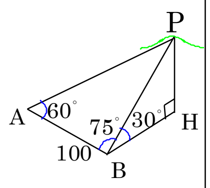


問題 ②　C 地点から池の両側に立つ木 A, B までの距離と $\angle ACB$ を測ると，$AC = 16$ m, $AB = 10$ m，$\angle ACB = 60^\circ$ であった。距離 AB を求めよ。



数学Ⅰ　空間図形 3 課題　　（　　）年（　　）組（　　）番（　　　　　　　　）

例題① 山のふもとの 2 地点 A, B から山頂 P を見ると，$\angle PAB = 60^\circ$，$\angle PBA = 75^\circ$ であった。B から P を見上げると 30° 上方であった。AB 間の距離が 100m のとき，P と B の標高差を求めよ。　※$\sqrt{6} = 2.45$



$\angle APB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

△ABP に正弦定理を使うと

$$2R = \frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{100}{\sin 45^\circ}$$

$$= 100 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}$$

$$BP = 2R \times \sin \angle BAP = 100\sqrt{2} \times \sin 60^\circ$$

$$= 100\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{6}$$

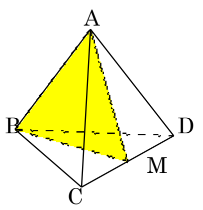
$$\sin 30^\circ = \frac{PH}{BP}, \quad PH = BP \times \sin 30^\circ$$

$$PH = 50\sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 25\sqrt{6}$$

$$\fallingdotseq 25 \times 2.45 = 61.25 \fallingdotseq \underline{61 \ (m)}$$

Looking at the summit P from two points A and B at the foot of the mountain, ∠PAB = 60° and ∠PBA = 75°. When I looked up from B to P, it was 30°. If the distance AB is 100m, find the difference in elevation between P and B.

例題② 一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とする。△ABM の面積 S を求めよ。



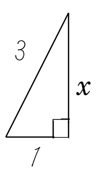
$$AM = BM = BC \times \sin 60^\circ$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

△ABM に余弦定理を使うと

$$\cos \angle AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2 \times AM \times BM}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$



$$3^2 = x^2 + 1^2$$

$$x^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

$x > 0$ より $x = \sqrt{8}$

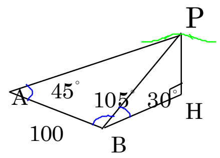
$$\sin \angle AMB = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} AM \times BM \times \sin \angle AMB$$

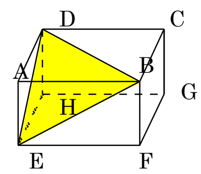
$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{8}}{3} = \underline{\sqrt{2}}$$

In a regular tetrahedron abcd with one side length 2, let M be the midpoint of side CD. Find the area S of △ ABM.

問題① 山のふもとの 2 地点 A, B から山頂 P を見ると，$\angle PAB = 45^\circ$，$\angle PBA = 105^\circ$ であった。B から P を見上げると 30° 上方であった。AB 間の距離が 100m のとき，P と B の標高差を求めよ。　※$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$



問題② $AB = \sqrt{3}$, $AD = 1$, $AE = 1$ である直方体 ABCD − EFGH において △BED の面積 S を求めよ。



数学Ⅰ　空間図形(正四面体)　課題　　(　)年(　)組(　)番(　　　)

例題　1辺の長さが4の正四面体ABCDに内接する球の中心をOとする。次の問に答えよ。

Inscribed in a regular tetrahedron ABCD whose side length is 4
Let O be the center of the sphere. Answer the next question.

(1) △ABCの面積 S_1 を求めよ。

Find the area S_1 of △ ABC.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \sin 60^\circ$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

(2) 正四面体ABCDの体積 V_1 を求めよ。

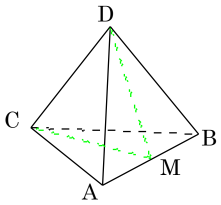
Find the volume V_1 of the regular tetrahedron ABCD.

ABの中点をMとすると,

DM, CMは△DAB, △CABの垂線であるから

$$\mathrm{DM} = \mathrm{CM} = \mathrm{AC} \times \sin 60^\circ$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$



∠CMD $= \theta$ とすると

$$\cos\theta = \frac{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 4^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\sin\theta > 0$ より　$\sin\theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

正四面体の高さを h とすると

$$h = \mathrm{DM} \times \sin\theta = 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

正四面体ABCDの体積 V_1 は

$$V_1 = \frac{1}{3} \times S_1 \times h$$

$$= \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

(3) 内接する球の半径 r を求めよ。

Find the radius r of the inscribed sphere.

四面体OABCの体積 V_2 は

$$V_2 = \frac{1}{4} V_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times S_1 \times r = \frac{4\sqrt{3}}{3} r$$

よって　$r = \frac{4\sqrt{2}}{3} \div \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

問題　1辺の長さが2の正四面体ABCDに内接する球の中心をOとする。次の問に答えよ。

(1) △ABCの面積 S_1 を求めよ。

(2) 正四面体ABCDの体積 V_1 を求めよ。

(3) 内接する球の半径 r を求めよ。